# கணிதம்

## தரம் 10

### பகுதி II

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்



முதலாம் பதிப்பு - 2014
இரண்டாம் பதிப்பு - 2015
மூன்றாம் பதிப்பு - 2016
நான்காம் பதிப்பு - 2017
ஐந்தாம் பதிப்பு - 2018
ஆறாம் பதிப்பு - 2019
ஏழாம் பதிப்பு - 2020



ISBN 978-955-25-0186-9

இந்நூல், கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினால்
அரசாங்க அச்சகக் கூட்டுத்தாபனத்தில்
அச்சிடப்பட்டு, வெளியிடப்பட்டது.

Published by: Educational Publications Department
Printed by: State Printing Corporation

# தேசிய கீதம்

*ஸ்ரீ லங்கா தாயே - நம் ஸ்ரீ லங்கா*
*நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே*

*நல்லெழில் பொலி சீரணி*
*நலங்கள் யாவும் நிறை வான்மணி லங்கா*
*ஞாலம் புகழ் வள வயல் நதி மலை மலர்*
*நறுஞ்சோலை கொள் லங்கா*
*நமதுறு புகலிடம் என ஒளிர்வாய்*
*நமதுதி ஏல் தாயே*
*நம தலை நினதடி மேல் வைத்தோமே*
*நமதுயிரே தாயே - நம் ஸ்ரீ லங்கா*
*நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே*

*நமதாரருள் ஆனாய்*
*நவை தவிர் உணர்வானாய்*
*நமதேர் வலியானாய்*
*நவில் சுதந்திரம் ஆனாய்*
*நமதிளமையை நாட்டே*
*நகு மடி தனையோட்டே*
*அமைவுறும் அறிவுடனே*
*அடல் செறி துணிவருளே - நம் ஸ்ரீ லங்கா*
*நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே*

*நமதார் ஒளி வளமே*
*நறிய மலர் என நிலவும் தாயே*
*யாமெலாம் ஒரு கருணை அனைபயந்த*
*எழில்கொள் சேய்கள் எனவே*
*இயலுறு பிளவுகள் தமை அறவே*
*இழிவென நீக்கிடுவோம்*
*ஈழ சிரோமணி வாழ்வுறு பூமணி*
*நமோ நமோ தாயே - நம் ஸ்ரீ லங்கா*
*நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே*

ஒரு தாய் மக்கள் நாமாவோம்
ஒன்றே நாம் வாழும் இல்லம்
நன்றே உடலில் ஓடும்
ஒன்றே நம் குருதி நிறம்

அதனால் சகோதரர் நாமாவோம்
ஒன்றாய் வாழும் வளரும் நாம்
நன்றாய் இவ் இல்லினிலே
நலமே வாழ்தல் வேண்டுமன்றோ

யாவரும் அன்பு கருணையுடன்
ஒற்றுமை சிறக்க வாழ்ந்திடுதல்
பொன்னும் மணியும் முத்துமல்ல - அதுவே
யான்று மழியாச் செல்வமன்றோ.

**ஆனந்த சமரக்கோன்**
கவிதையின் பெயர்ப்பு.

# முன்னுரை

*உலகம் நாளுக்கு நாள் விருத்தி அடைந்து செல்கின்றது. அதற்கேற்பக் கல்வித் துறையும் எப்போதும் புதுப்பொலிவு பெறுகின்றது. அதனால், எதிர்காலச் சவால்களுக்குச் சிறப்பாக முகங்கொடுக்க முடியுமான மாணவர் சமுதாயமொன்றை உருவாக்க வேண்டுமாயின், எமது கற்றல் கற்பித்தல் செயற்பாடுகளும் வினைத்திறன் மிக்கதாக அமைய வேண்டும். அதற்கு வலுவூட்டி நவீன உலக அறிவை வழங்கும் அதேவேளை உலகிற்கு நற்பண்புகள் நிறைந்த பிரசைகளை உருவாக்குவதற்கு உதவுவதும் எமது பொறுப்பாகும். தேசத்தின் பிள்ளைகளின் அறிவுத் தீபத்தை ஏற்றும் உன்னத நோக்கத்துடன் எமது திணைக்களம் கற்றல் சாதனங்களை உருவாக்கும் செயற்பாட்டில் செயலூக்கத்துடன் ஈடுபட்டு அதற்குப் பங்களிப்பு வழங்குகின்றது.*

*பாடநூல்கள் அறிவு நிறைந்த களஞ்சியங்களாகும். அவை சில வேளைகளில் எங்களை இரசனை உலகிற்கு அழைத்து செல்வதுடன் தர்க்கரீதியாகச் சிந்திக்கும் ஆற்றலையும் வளர்க்கின்றது. மறைந்துள்ள ஆற்றல்களை வெளிக்கொணர்கின்றது. எதிர்காலத்தில் எப்போதாவது, இந்தப் பாடநூல்கள் தொடர்பான சில ஞாபகங்களை மீட்கும்போது அவை உங்கள் மனதுக்கு இதமானதாக அமையும். இந்தப் பெறுமதி வாய்ந்த கற்றல் சாதனத்தின் மூலம் சிறந்த பயன்பெறும் அதேவேளை மேன்மேலும் சிறந்த அறிவு மூலங்களை நெருங்குவதும் உங்களுக்குப் பயனுள்ளதாக அமையும். இலவசக் கல்வியின் பெறுமதிமிக்க ஒரு பரிசாக இப்பாடநூல் உங்களுக்கு இலவசமாக வழங்கப்படுகின்றது. பாடநூல்களுக்காக அரசாங்கம் செலவிட்டுள்ள பெருந் தொகைப் பணத்திற்கு, உங்களால் மாத்திரமே பெறுமதி சேர்க்க முடியும். இப்பாடநூலை சிறப்பாகப் பயன்படுத்தி சிறந்த அறிவும் பண்பாடும் கொண்ட பிரசைகளாகி நாளைய உலகிற்கு ஒளியூட்டுவதற்கு உங்கள் அனைவருக்கும் ஆற்றலும் தைரியமும் கிடைக்க வேண்டுமென்று வாழ்த்துகின்றேன்.*

*இப்பாடநூலை உருவாக்குவதில் அளப்பரிய பங்களிப்பு வழங்கிய எழுத்தாளர் மற்றும் பதிப்பாசிரியர் குழுக்களின் அங்கத்தவர்களுக்கும் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தின் உத்தியோகத்தர்கள் அனைவருக்கும் எனது மனமார்ந்த நன்றிகளைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.*

**பீ. என். அயிலப்பெரும**
*கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம்*
*கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்*
*இசுருபாய*
*பத்தரமுல்ல*
2020. 06. 26

**கண்காணிப்பும் மேற்பார்வையும்**

பீ. என். அயிலப்பெரும - கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

**வழிகாட்டல்**

டபிள்யூ. ஏ. நிர்மலா பியசீலி - ஆணையாளர் (அபிவிருத்தி)
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

**இணைப்பாக்கம்**

அ. குலரத்தினம் - பிரதி ஆணையாளர்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

**எழுத்தாளர் குழு**

என். வாகீசமூர்த்தி - பணிப்பாளர் (ஓய்வு நிலை)

ஆர். எஸ். ஈ. புஸ்பராஜன் - உதவிப் பணிப்பாளர்
வலையக் கல்விப் பணிமனை, புத்தளம்.

கே. கருணேஸ்வரன் - ஆசிரிய ஆலோசகர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை, கொழும்பு.

ஹேமமாலினி வீரக்கொடி - விரிவுரையாளர்
பஸ்துன்ரட்ட தேசியக் கல்வியற் கல்லூரி.

எச்.எம். ஜயசேன. - ஆசிரிய ஆலோசகர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை, அம்பலாங்கொட

வி. வி. ஆர். விதாரம - ஆசிரிய ஆலோசகர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை, தெகியோவிட்ட.

அஜித் ரணசிங்க - ஆசிரிய ஆலோசகர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை, ஹோமாகம.

வீ.எம்.பி.லால் ஜெயகாந்த - ஆசிரிய ஆலோசகர்
சாந்த தோமஸ் கல்லூரி கல்கிஸ்சை.

அனுர வீரசிங்க - ஆசிரிய ஆலோசகர் (பிரிவேனா)

எச். ஏ. பீ. தர்மரத்ன - ஆசிரிய சேவை
ஸ்ரீமாவோ பண்டாரனாயக்க வித்தியாலயம், கொழும்பு 7.

ஜி. எச். எஸ். ரஞசனி டி சில்வா - ஆசிரிய சேவை
தர்மபால வித்தியாலம், பன்னிபிட்டிய.

**பதிப்பாசிரியர் குழு**

| | | |
|---|---|---|
| கலாநிதி ரோமைன் ஜயவர்த்தன | - | சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்<br>கணிதத்துறை, கொழும்புப் பல்கலைக்கழகம். |
| கலாநிதி பீ. கே. மல்லவ ஆராச்சி | - | சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்<br>கணிதத்துறை, களனிப் பல்கலைக்கழகம். |
| டபிள்யூ. எச். பிரஞ்ஞாதர்ஷன | - | சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்<br>கல்விப் பீடம், கொழும்புப் பல்கலைக்கழகம். |
| சி. ராஜேந்திரன் | - | விரிவுரையாளர்<br>கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம் |
| பீ. ஜெகத்குமார | - | சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் |
| அ. குலரத்தினம் | - | பிரதி ஆணையாளர்.<br>கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம். |

**மொழி பதிப்பாசிரியர்**

| | | |
|---|---|---|
| எஸ். ஜெயகாண்டீபன் | - | விரிவுரையாளர்<br>கல்வியற் கல்லூரி, வவுனியா. |

**கணினி வடிவமைப்பு**

| | | |
|---|---|---|
| முத்தையா காந்தரூபன் | - | கணினி வடிவமைப்பாளர்<br>கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம். |

# உள்ளடக்கம்

பக்கம்

## எழுத்தாளர், பதிப்பாசிரியர் குழுக்களின் அறிவுறுத்தல்

2015 ஆண்டிலிருந்து நடைமுறைக்கு வரும் புதிய பாடத்திட்டத்திற்கேற்ப இப்பாடநூல் எழுதப்பட்டுள்ளது. பாடநூல் மாணர்களுக்காகவே தயாரிக்கப்படுகின்றது. எனவே நீங்கள் தனித்து வாசித்தேனும் விளங்கிக்கொள்ளத்தக்க வகையில் எளிமையாகவும் விபரமாகவும் அதனைத் தயாரிக்க முயற்சித்தோம்.

பாட எண்ணக்கருக்களைக் கவர்ச்சியான வகையில் முன்வைப்பதற்காகவும் உறுதிபடுத்துவதற்காகவும் விபரித்தல், செயற்பாடு மற்றும் உதாரணங்கள் போன்று வெவ்வேறு முறைகளைப் பின்பற்றினோம். பயிற்சிகளைச் செய்வதன் விருப்பு விருத்தியடையும் வகையில் எளிமையிலிருந்து கடினம் வரை முறையாக ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டுள்ளன.

கணிதப் பாடத்துக்குரிய எண்ணக்கருக்களைக் குறிக்கும் சொற்களை அரச கரும மொழித் திணைக்களம் தயாரித்துள்ள கணிதப் பாடக் கலைச் சொல் அகராதிக்கேற்பப் பயன்படுத்தினோம்.

பாடத்திட்டத்தில் தரம் 10 இற்குரிய பாடப்பகுதிகளைக் கற்பதற்கு, முன்னைய தரங்களில் நீங்கள் கற்ற சிற்சில விடயங்கள் தேவைப்படும். எனவே அம்முன்னறிவை ஞாபகப்படுத்துவதற்காக மீட்டற் பயிற்சிகள் தேவையான அத்தியாத்தின் தொடக்கத்திலும் தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றின்மூலம் தரம் 10 இற்குரிய பாடவிடயங்களுக்காக நீங்கள் தயார்படுத்தப்படுவீர்கள்.

வகுப்பில் ஆசிரியர் கற்பிப்பதற்கு முன்னர் நீங்கள் இவ்வத்தியாயங்களை வாசிப்பதன் மூலமும் ஒவ்வோர் அத்தியாத்தில் வரும் மீட்டற் பயிற்சிகளை செய்வதன் மூலமும் இப்பாடநூலைப் பயன்படுத்தி உச்ச பயன்களைப் பெறலாம்.

கணிதக் கல்வியானது மகிழ்ச்சிகரமானதாகவும் பயனுடையதாகவும் அமைய நாங்கள் ஆசிக்கின்றோம்.

நூலாக்கக் குழுவினர்.

# 19 மடக்கை 1

**இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,**

- மடக்கைகளைக் கொண்டு ஓர் எண் கோவையைச் சுருக்குவதற்குத் தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

## சுட்டிகள்

2 ஐ நான்கு தடவை பெருக்கல் $2^4$ என எழுதப்படும்.
அதாவது, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.
ஆகவே $2^4$ இன் பெறுமானம் 16 ஆகும்.

அவ்வாறே $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$.

$2^4$, $3^3$ ஆகிய கோவைகள் வலுக்கள் எனப்படும். $2^4$ இன் அடி 2 ஆக இருக்கும் அதே வேளை சுட்டி 4 ஆகும். நீங்கள் சுட்டிகள் பற்றி இதுவரை கற்ற விடயங்களை மீட்பதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

### மீட்டற் பயிற்சி

**1.** கீழே அடைப்பு *A* யில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஒத்த உறுப்பை அடைப்பு *B* யிலிருந்து தெரிந்தெடுத்து இணைக்குக.

| A | B |
|---|---|
| $a \times a$ | $5^{-1}$ |
| $a^{-2}$ | $a \times a \times b \times b$ |
| $a$ | $5^5$ |
| $a^2b^2$ | $\frac{a}{b}$ |
| $5^1$ | $a^2$ |
| $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{a^2}$ |
| $x^\circ$ | 1 |
| $5^3 \times 5^2$ | $a^1$ |
| $ab^{-1}$ | 5 |

**2.** கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

(i) $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^{\cdots}} = 2^{\cdots}$ (ii) $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^{\cdots}} = 10^{\cdots}$ (iii) $\frac{1}{125} = \frac{1}{5^{\cdots}} = 5^{\cdots}$

(iv) $\frac{1}{81} = \frac{1}{3^{\cdots}} = 3^{\cdots}$ (v) $0.01 = \frac{1}{\cdots} = \frac{1}{10^{\cdots}} = \cdots$ (vi) $0.001 = \frac{1}{\cdots} = \frac{1}{\cdots} = \cdots$

**3.** சுருக்குக.

(i) $a^2 \times a^3$ (ii) $x^5 \times x$ (iii) $\frac{x^5 \times x^7}{x^{11}}$

(iv) $\frac{a^3 \times a^5}{a^2 \times a^6}$ (v) $\frac{p^3 \times p^1}{p}$ (vi) $\frac{x^0 \times x^5}{x}$

**4.** பின்வரும் கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் சுருக்கிப் பெறுமானம் காண்க.

(i) $2^2 \times 2^3$ (ii) $\frac{3^7}{3^4}$ (iii) $\frac{3^2 \times 3^8}{3^5}$

(iv) $\frac{5^3 \times 5^0}{5}$ (v) $\frac{10^2 \times 10^3}{10 \times 10^4}$ (vi) $\frac{2^5 \times 2^3}{2^6 \times 2^2}$

## 19.1 மடக்கைகள்

சுட்டிகளின் இயல்புகளைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கலை எளிதாக்கும் விதம் பற்றிப் பார்ப்போம். அதற்காக கீழே தரப்பட்டுள்ள 2 இன் அடியிலான அட்டவணையைக் கருதுக.

| 2 இன் வலு | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ | $2^9$ | $2^{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| பெறுமானம் | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |

அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி $\frac{64 \times 512}{128}$ இன் பெறுமானத்தைக் காணும் முறையை ஆராய்வோம்.

முதலில் இவ்வெண்களை ஒரே எண்ணின் வலுக்களாக எழுதுவோம்.

$$\frac{64 \times 512}{128} = \frac{2^6 \times 2^9}{2^7}$$ *(அட்டவணைக்கேற்ப)*

$$= 2^{6+9-7}$$ *(சுட்டி விதிகளுக்கேற்ப)*

$$= 2^8$$

$$= 256$$ *(அட்டவணைக்கேற்ப)*

சுட்டி விதிகளைப் பயன்படுத்தி மேற்குறித்த சுருக்கலை எளிதாகவும் சுருக்கமாகவும் செய்யலாமெனத் தெரிகின்றது. இவ்வுதாரணத்தில் உள்ள எண்களை 2 இன் வலுக்களாக எழுதலாம். மடக்கை அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்தி எண்களின் பெருக்கமும் வகுத்தலும் அடங்கிய எந்தவொரு கோவையையும் எளிதாகச் சுருக்கலாம். ''மடக்கை'' என்பதால் ''குறுகியது'' எனக் கருதப்படும். மடக்கை அட்டவணைகளை முதன் முதலாக அறிமுகஞ்செய்த பெருமை இத்தாலியைச் சேர்ந்த ஜோன் நேப்பியர் (John Napier கி.பி. 1550 - கி.பி. 1617) என்ற கணிதவியலாளருக்கு உரியதாகும். அவருடைய சமகாலத்தவராகிய பிறிக்ஸ் என்ற கணிதவியலாளர் மடக்கைகளை மேலும் விருத்தி செய்து முன்வைத்தார். தற்காலத்தில் கணிகருவியின் பயன்பாடு அதிகரித்தமையால் நவீன யுகத்தில் மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவது அரிதாகி வருகின்றது. எனினும், இவற்றுடன் தொடர்புபட்ட கணித எண்ணக்கருக்களைக் கற்றல் மிக முக்கியமானதும் அவசியமானதுமாகும்.

## சுட்டி வடிவமும் மடக்கை வடிவமும்

$2^3 = 8$ என்னும் சுட்டி வடிவில் இருக்கும் ஒரு கோவையைக் கருதுவோம்.
$2^3 = 8$ ஆக இருக்கும்போது அடி 2 இற்கு 8 இன் மடக்கை 3 என எழுதப்படும்.
அது $\log_2 8 = 3$ என எழுதப்படும்.
இந்த $2^3 = 8$ ஆனது **சுட்டி வடிவம்** எனவும் மேலும் $\log_2 8 = 3$ ஆனது **மடக்கை வடிவம்** எனவும் அழைக்கப்படும். ஒரு கோவையானது சுட்டி வடிவம், மடக்கை வடிவம் என்னும் இரண்டு வடிவங்களில் எழுதப்படுகின்றது.

இதற்கேற்பச் சுட்டி வடிவம் $2^3 = 8$ எனின், மடக்கை வடிவம் $\log_2 8 = 3$. அதேபோல் மடக்கை வடிவம் $\log_2 8 = 3$ எனின் சுட்டி வடிவம் $2^3 = 8$ ஆகும்.
மேலும் சில உதாரணங்களைக் கருதுவோம்.

- $3^2 = 9$ ஆகையால் , அடி 3 இற்கு 9 இன் மடக்கை 2, அதாவது $\log_3 9 = 2$.
- $5^1 = 5$ ஆகையால் , அடி 5 இற்கு 5 இன் மடக்கை 1 ஆகும். அதாவது $\log_5 5 = 1$.
- $10^3 = 1000$ ஆகையால் , அடி 10 இற்கு 1000 இன் மடக்கை 3 ஆகும். அதாவது. $\log_{10} 1000 = 3$.

இது பொதுவாக $a$ ஒரு நேர் எண்ணாக இருக்கும்போது

$a^x = N$ எனின் $\log_a N = x$ அல்லது $\log_a N = x$ எனின் $a^x = N$ எனக் காட்டலாம்.

$a^x = N$ சுட்டி வடிவமாகவும் $\log_a N = x$ மடக்கை வடிவமாகவும் கருதப்படும். இங்கு $a$, $N$ ஆகியவற்றின் நேர்ப் பெறுமானம் மாத்திரம் எடுக்கப்படும். (ஒரு நேர் எண்ணின் யாதாயினும் ஒரு வலு நேர் ஆகையால், மேற்குறித்த தொடர்பில் $a$ நேராக இருக்கும் போது $N$ உம் ஒரு நேர் எண்ணாகும்). இதற்கேற்ப மடக்கைகளைக் கருதும்போது எப்போதும் அடி நேரான எண்கள் மாத்திரம் எடுக்கப்படும்.

இப்போது மடக்கைகளின் சில இயல்புகளைக் காண்போம்.

(i) எந்தவோர் அடியிலும் அவ்வெண்ணின் மடக்கை 1 ஆகும்.
அதாவது $\log_a a = 1$ இதற்குக் காரணம் $a^1 = a$ ஆக இருப்பதாகும்.
உதாரணமாக, $\log_2 2 = 1$, $\log_{10} 10 = 1$.

(ii) எந்தவோர் அடிக்கும் 1 இன் மடக்கை 0 ஆகும். அதாவது $\log_a 1 = 0$
இதற்குக் காரணம் $a^0 = 1$ ஆக இருப்பதாகும்.
உதாரணமாக $\log_2 1 = 0$, $\log_{10} 1 = 0$.

இதுவரை மடக்கைகளாக ஒரு நேர்ப் பெறுமானம் பெறப்படும் உதாரணங்களை மாத்திரம் நாம் பார்த்தோம். எனினும், மடக்கையாக மறைப் பெறுமானங்களும் பெறப்படலாம். ஒன்றிலும் குறைந்த எண்களின் மடக்கைப் பெறுமானம் எப்போதும் மறையாகும்.

உதாரணமாக

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3} \text{ ஆகையால் } \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3.$$

$$0.01 = \frac{1}{100} = 10^{-2} \text{ ஆகையால் } \log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2.$$

$$0.5 = \frac{5}{10} = 2^{-1} \text{ ஆகையால் } \log_2(0.5) = -1.$$

இனி மடக்கைகள் அடங்கிய சமன்பாடுகள் தீர்க்கப்படும் விதம் பற்றிப் பார்ப்போம்.

**உதாரணம்** 1

பின்வரும் சந்தர்ப்பங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் $x$ இனால் தரப்படும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $\log_2 64 = x$ (ii) $\log_x 81 = 4$ (iii) $\log_5 x = 2$

(i) $\log_2 64 = x$

$2^x = 64$ (சுட்டி வடிவம்)

$2^x = 2^6$

$\therefore x = 6$

(ii) $\log_x 81 = 4$

$x^4 = 81$

$x^4 = 3^4$

$x = \pm 3$

$x = +3$ அல்லது $-3$

மடக்கையின் அடியாக
மறைப் பெறுமானம்
இருக்க முடியாது என்பதால்

$\therefore x = +3$

(iii) $\log_5 x = 2$

$x = 5^2$

$x = 25$

**பயிற்சி 19.1**

**1.** பின்வரும் கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றையும் மடக்கை வடிவத்தில் தருக.

(i) அடி 2 இல் 32 இன் மடக்கை 5 ஆகும்.

(ii) அடி 10 இல் 1000 இன் மடக்கை 3 ஆகும்.

(iii) அடி 5 இல் $x$ இன் மடக்கை $y$ ஆகும்.

(iv) அடி $p$ இல் $q$ வின் மடக்கை $r$ ஆகும்.

(v) அடி $q$ இல் $r$ இன் மடக்கை $p$ ஆகும்.

**2.** சுட்டி வடிவில் தருக.

(i) $\log_5 125 = 3$ (ii) $\log_{10} 100000 = 5$ (iii) $\log_a x = y$

(iv) $\log_p a = q$ (v) $\log_a 1 = 0$ (vi) $\log_m m = 1$

**3.** மடக்கை வடிவில் தருக.

(i) $2^8 = 256$ (ii) $10^4 = 10000$ (iii) $7^3 = 343$

(iv) $20^2 = 400$ (v) $a^x = y$ (vi) $p^a = q$

**4.** பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றிலும் $x$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(i) $\log_3 243 = x$ (ii) $\log_{10} 100 = x$ (iii) $\log_6 216 = x$

(iv) $\log_x 25 = 2$ (v) $\log_x 64 = 6$ (vi) $\log_x 10 = 1$

(vii) $\log_3 x = 2$ (viii) $\log_{10} x = 4$ (ix) $\log_8 x = 2$

**5.** (i) 64 ஐ ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்ட அடியிலான வலுக்களாக நான்கு விதங்களில் தருக.

(ii) $\log_x 64 = y$ இல் $x$ இற்கும் $y$ இற்கும் பொருத்தமான நான்கு சோடிகளைக் காண்க.

## 19.2 மடக்கை விதிகள்

16 × 32 இன் பெறுமானத்தைச் சுட்டி வடிவத்தில் எழுதத்தக்க விதத்தை நினைவு கூர்வோம்.

$16 \times 32 = 2^4 \times 2^5$ (இரண்டின் வலுவில் காட்டுதல்)

$= 2^{4+5}$ (சுட்டி விதியைப் பயன்படுத்தல்)

$= 2^9$

இங்கு $16 \times 32 = 2^{4+5}$ என்பதைக் கவனிப்போம்.

இதனை மடக்கை வடிவத்திற்கு மாற்றுவோம்.

$16 \times 32 = 2^{4+5}$ (சுட்டி வடிவம்)

$\therefore \log_2(16 \times 32) = 4+5$ (மடக்கை வடிவம்)

$= \log_2 16 + \log_2 32$ ($4 = \log_2 16$ , $5 = \log_2 32$ ஆகையால்)

அவ்வாறே $27 \times 81 = 3^3 \times 3^4 = 3^{3+4}$ ஆகையால்

$\log_3(27 \times 81) = 3 + 4$ ($3 = \log_3 27$ , $4 = \log_3 81$ ஆகையால்)

$\log_3(27 \times 81) = \log_3 27 + \log_3 81$

இவ்வாறே $\log_{10}(10 \times 100) = \log_{10}10 + \log_{10}100$
$\log_5(125 \times 25) = \log_5 125 + \log_5 25$ எனவும் எழுதலாம்.
வலுக்களைப் பெருக்கும்போது மடக்கைகளின் நடத்தை பற்றிய ஒரு முக்கியமான விடயம் தெளிவாகின்றது. அது பொதுவாக எந்த வலுப் பெருக்கலுக்கும் உண்மையாக இருக்கும் அதே வேளை அதனை பின்வருமாறு காட்டுவோம்.

$$\boxed{\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n}$$

இக்கோவையை ''பெருக்கத்தின் மடக்கையானது மடக்கைகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம்'' எனவும் எடுத்துரைக்கலாம்.
மடக்கைகளின் வகுத்தலுக்கு இவ்வாறான ஒரு சூத்திரத்தைப் பெறலாம். அது பற்றி தற்போது பார்ப்போம்.
பின்வரும் உதாரணங்களைக் கவனிப்போம்.

இப்போது 128 ÷ 16 இன் பெறுமானம் பெறப்படத்தக்கதாகச் சுட்டி வடிவத்தில் எழுதிப் பெறப்படும் விதத்தை நினைவுகூர்வோம்.

$$\frac{128}{16} = \frac{2^7}{2^4}$$ (இரண்டின் வலுக்களாகக் காட்டல்)

$$= 2^{7-4}$$ சுட்டி விதிகளைப் பயன்படுத்தல்

$$\therefore \frac{128}{16} = 2^{7-4}$$
$$= 2^3$$

$$\therefore \log_2\left(\frac{128}{16}\right) = 7 - 4$$ (மடக்கை வடிவத்தில் எழுதும்போது)

இப்போது $128 = 2^7$ ஆகையால், $7 = \log_2 128$ உம்
$16 = 2^4$ ஆகையால், $4 = \log_2 16$ உம் ஆகும்.

இதற்கேற்ப, $\log_2\left(\frac{128}{16}\right) = 7 - 4 = \log_2 128 - \log_2 16$ ஆகும்.

இவ்வாறே, $\log_5(125 \div 5) = \log_5 125 - \log_5 5$
$$\log_{10}\left(\frac{1000}{100}\right) = \log_{10}1000 - \log_{10}100$$

வலுக்களை வகுக்கும்போது மடக்கைகளின் நடத்தை பற்றிய ஒரு முக்கிய விடயம் இதிலிருந்து தெளிவாகின்றது. அது பொதுவாக எந்த வலு வகுத்தலுக்கும் உண்மையாக இருக்கும் அதே வேளை அதனை பின்வருமாறு காட்டுவோம்.

$$\boxed{\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n}$$

இப்போது இம்மடக்கை விதிகளைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்கள் தீர்க்கப்படும் விதத்தை பின்வரும் உதாரணங்களின் மூலம் கற்போம்.

**உதாரணம் 1**

1. பின்வரும் கோவைகள் ஒவ்வொன்றினதும் பெறுமானம் காண்க.

(i) $\log_2 32 + \log_2 2$ (ii) $\log_5 15 - \log_5 3$

(i) $\log_4 32 + \log_4 2 = \log_4 (32 \times 2)$

$= \log_4 64$

$= 3 \quad (64 = 4^3$ என்பதால் $)$

(ii) $\log_5 15 - \log_5 3 = \log_5 \left(\frac{15}{3}\right)$

$= \log_5 5$

$= 1$

**உதாரணம் 2**

பெறுமானம் காண்க.

$\log_{10} 25 + \log_{10} 8 - \log_{10} 2$

$\log_{10} 25 + \log_{10} 8 - \log_{10} 2 = \log_{10} \left(\frac{25 \times \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}^{1}}\right)$

$= \log_{10} 100$

$= 2$

$\log_{10} 100 = x$

$10^x = 100$

$10^x = 10^2$

$\therefore x = 2$

**உதாரணம் 3**

(i) $\log_a 6$ (ii) $\log_a 18$ என்பவற்றை $\log_a 2$ , $\log_a 3$ என்பவற்றில் தருக.

(i) $6 = 2 \times 3$

$\log_a 6 = \log_a (2 \times 3)$

$= \log_a 2 + \log_a 3$

(ii) $18 = 2 \times 3 \times 3$

$\log_a 18 = \log_a (2 \times 3 \times 3)$

$= \log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 3$

$= \log_a 2 + 2 \log_a 3$

**உதாரணம் 4**

தீர்க்க $\log_a 5 + \log_a x = \log_a 3 + \log_a 10 - \log_a 2$

$$\log_a 5 + \log_a x = \log_a 3 + \log_a 10 - \log_a 2$$
$$\log_a (5 \times x) = \log_a \left(\frac{3 \times 10}{2}\right)$$
$$\therefore\ 5x = \frac{3 \times \cancel{10}^{5}}{\cancel{2}_{1}}$$
$$5x = 15$$
$$x = 3$$

இப்போது மடக்கை விதிகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

**பயிற்சி 19.2**

**1.** பின்வரும் கோவைகளைச் சுருக்கி விடையைத் தனி மடக்கை வடிவத்தில் தருக.

(i) $\log_2 10 + \log_2 5$ (ii) $\log_3 8 + \log_3 5$ (iii) $\log_2 7 + \log_2 3 + \log_2 5$
(iv) $\log_6 20 - \log_6 4$ (v) $\log_a 10 - \log_a 2 - \log_a 5$ (vi) $\log_{10} 6 + \log_{10} 2 - \log_{10} 3$

**2.** பின்வரும் கோவைகள் ஒவ்வொன்றினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $\log_2 4 + \log_2 8$ (ii) $\log_3 27 - \log_3 3$
(iii) $\log_{10} 20 + \log_{10} 2 - \log_{10} 4$ (iv) $\log_2 80 - \log_2 15 + \log_2 12$
(v) $\log_{10} 20 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2$ (vi) $\log_5 20 + \log_5 4 - \log_5 16$

**3.** பின்வரும் கோவைகளை $\log_a 3$ , $\log_a 5$ என்பவற்றில் தருக.

(i) $\log_a 15$ (ii) $\log_a \left(\frac{5}{3}\right)$ (iii) $\log_a \left(\frac{25}{3}\right)$
(iv) $\log_a 45$ (v) $\log_a 75$ (vi) $\log_a 225$

**4.** தீர்க்க.

(i) $\log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 x$ (ii) $\log_a 10 + \log_a x = \log_a 30$
(iii) $\log_3 20 + \log_3 x = \log_3 4 + \log_3 10$ (iv) $\log_a 15 - \log_a 3 = \log_a x$
(v) $\log_{10} 8 + \log_{10} x - \log_{10} 2 = \log_{10} 12$ (vi) $\log_5 24 - \log_5 4 = \log_5 2 + \log_5 x$

**பொழிப்பு**

- $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$
- $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
- $\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0$

**பலவினப் பயிற்சி**

**1.** பின்வருவனவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

(i) $\log_3 27 + \log_2 8$ (ii) $\log_3 243 - \log_3 27$ (iii) $\log_2 16 \times \log_3 9$

(iv) $\dfrac{\log_{10} 10}{\log_2 32}$ (v) $\log_a 5 + \log_a 3 - \log_a 15$

**2.** $\log_2 24 = x$ எனின், $\log_2 48$ இன் பெறுமானத்தை $x$ இன் சார்பில் தருக.

**3.** பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றையும் வாய்ப்புப் பார்க்க.

(i) $\log_a\left(\frac{9}{10}\right) + \log_a\left(\frac{25}{81}\right) = \log_a 5 - \log_a 18$

(ii) $\log_5 1 + \log_5 20 - \log_5 8 + \log_5 2 = 1$

(iii) $\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1 = \log_{10} 0.6$

**4.** பெறுமானம் காண்க.

(i) $\log_{10} 200 + \log_{10} 300 - \log_{10} 60$

(ii) $\log_{10}\left(\frac{12}{5}\right) + \log_{10}\left(\frac{25}{21}\right) - \log_{10}\left(\frac{2}{7}\right)$

**5.** தீர்க்க.

(i) $\log_{10} x - \log_{10} 2 = \log_{10} 3 - \log_{10} 4 + 1$

(ii) $\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 x + 1$

# 20 மடக்கை II

**இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,**

- மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி 1 இலும் பெரிய எண்களின் பெருக்குதலும் வகுத்தலும் உள்ளடங்கிய கோவைகளைச் சுருக்கவும்
- ஒரு கணிகருவியில் [+], [−], [×], [÷], [=], [(], [)] ஆகிய சாவிகளை அறிந்து கொள்ளவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

## மடக்கை அட்டவணை

மடக்கை பற்றி நாம் முன்னர் கற்ற விடயங்களை மீண்டும் நினைவுகூர்வோம்.
$10^0 = 1$ என்பதால் $\log_{10} 1 = 0$. அதாவது, 10 ஐ அடியாகக் கொண்ட 1 இன் மடக்கை 0 ஆகும்.
$10^1 = 10$ என்பதால் $\log_{10} 10 = 1$. அதாவது, 10 ஐ அடியாகக் கொண்ட 10 இன் மடக்கை 1 ஆகும்.
$10^2 = 100$ என்பதால் $\log_{10} 100 = 2$. அதாவது, 10 ஐ அடியாகக் கொண்ட 100 இன் மடக்கை 2 ஆகும்.
$10^3 = 1\,000$ என்பதால் $\log_{10} 1\,000 = 3$. அதாவது, 10 ஐ அடியாகக் கொண்ட 1 000 இன் மடக்கை 3 ஆகும்.
இதிலிருந்து பின்வரும் அட்டவணை தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

| எண் | 1 | 10 | 100 | 1 000 | 10 000 |
|---|---|---|---|---|---|
| பத்தின் அடியில் மடக்கை | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

மேலேயுள்ள அட்டவணையில் 1, 10, 100, 1 000 , 10 000 ஆகிய எண்களின் பத்தின் அடியிலான மடக்கைகள் தரப்பட்டுள்ளன. 0 இற்கும் 1 இற்குமிடையில் 1 இற்கும் 10 இற்குமிடையில், 10 இற்கும் 100 இற்குமிடையில் அமையும் எண்களுக்கும் பத்தின் அடியில் மடக்கைப் பெறுமானங்கள் உள்ளன. அம்மடக்கைகள் முழு வெண்கள் அல்ல. அவற்றை ஏதேனும் ஒரு முறையில் கணித்து ஒரு மடக்கை அட்டவணையைத் தயாரிப்பதில் இன்றைக்கு மூன்று நூற்றாண்டுகளுக்கு முன்னர் வாழ்ந்த ஆங்கிலேயரான ஹென்றி கிரிப்ஸ் என்னும் கணிதவியலாளர் வெற்றி கண்டார். அவர் அட்டவணையில் 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள எண்களின் மடக்கைகளை மட்டும் இணைத்திருந்தார். அம்மடக்கை அட்டவணையின் ஒரு பகுதி இங்கே தரப்பட்டுள்ளது.

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | இடைவித்தியாசம் 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 | 4 | 8 | 12 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 26 | 30 | 34 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |

இங்கு இடப்பக்க முதல் நிரலில் N இன் கீழ் 10, 11, 12,...99 எனக் கொள்ளப்படும் 1.0, 1.1, 1.2, 1.3 ,... 9.9 என எண்கள் தரப்பட்டுள்ளன. இவ்வெண்களில் தசமப்புள்ளியானது மடக்கை அட்டவணையில் குறிக்கப்படவில்லை. (அட்டவணை எளிதாயிருப்பதற்காக இவ்வாறு எண்கள் இடப்பட்டுள்ளன). ஆயினும் பிரயோகத்தின்போது அத்தசமப் புள்ளியை உரியவாறு குறித்துக்கொள்ள வேண்டும். அட்டவணையில் மேலே இடமிருந்து வலமாக உள்ள நிரையில் 0, 1, 2, 3, ..9 என்னும் எண்களும் அதே நிரையில் வலப்பக்கத்தில் இடைவித்தியாசத்தின் கீழ் 1, 2, 3… 9 என்றவாறு எண்களும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

உதாரணமாக அட்டவணையில் 29 இற்குரிய நிரையில் 6 ஆம் நிரலுக்குரிய பெறுமானம் 0.4713 ஆகும். இவ்வெண்ணில் இருக்கவேண்டிய தசமப்புள்ளி மடக்கை அட்டவணையில் இடப்படுவதில்லை.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 29 | .4624 | .4639 | .4654 | .4669 | .4683 | .4698 | .4713 | .4728 | .4742 | .4757 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 12 |

அதாவது, 2.96 இன் மடக்கை 0.4713 ஆகும். வேறொரு விதமாக கூறுவதாயின், $10^{0.4713} = 2.96$. அதாவது 2.96 என்னும் எண்ணை பத்தின் வலுவில் எழுதும்போது அது $10^{0.4713}$ ஆகும். மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி நான்கு இலக்கங்கள் வரையிலான எண்ணொன்றின் மடக்கையைக் காணலாம். அட்டவணையிலிருந்து பெறப்படும் மடக்கைப் பெறுமானத்தை எழுதும்போது $\log_{10}$ என அடியைக் குறிப்பிடுவதற்குப் பதிலாக, சுருக்கமாக lg மாத்திரம் குறிக்கப்படும்.

உதாரணம்: $\log_{10} 100 = 2$ என்பது $\lg 100 = 2$ என எழுதப்படும்.

சிறப்பாக 2.9 இன் மடக்கையைக் காண்பதற்காக 2.9 = 2.90 என எழுதி 29 ஆம் நிரை வழியே 0 அடங்கியுள்ள முதலாம் நிரலிலுள்ள பெறுமானத்தை எடுக்க வேண்டும். அது 0.4624 ஆகும்.

$\therefore \log_{10} 2.9 = 0.4624$ அல்லது $\lg 2.9 = 0.4624$ என எழுதப்படும்.

சுட்டி வடிவில் அது $2.9 = 10^{0.4624}$ ஆகும்.

**குறிப்பு:** இங்கு ஓர் எண்ணின் மடக்கைப் பெறுமானம் ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானமாகும்.

## 20.1 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள இரண்டு தசம தானங்கள் வரை உள்ள எண்களின் மடக்கைப் பெறுமானங்கள்

மடக்கை அட்டவணையில் lg 4.58 ஐப் பெற்றுக் கொள்ளும் முறையை அறிந்து கொள்வோம். 4.58 இல் முதல் இரண்டு இலக்கங்களினாலும் குறிப்பிடப்படும் எண்ணாகிய 45 இற்கு உரியதாகும் நிரை வழியே செல்லும்போது எஞ்சிய இலக்கத்தினால் தரப்பட்டுள்ள எண்ணாகிய 8 அடங்கியுள்ள நிரலுக்குரிய பெறுமானம் 0.6609 ஆகும். இதுவே தேவையான மடக்கைப் பெறுமானமாகும். அதாவது,
4.58 இன் மடக்கைப் பெறுமானம் lg 4.58 = 0. 6609 ஆகும்.
இதனைச் சுட்டி வடிவில் எழுதும்போது $4.58 = 10^{0.6609}$ எனப் பெறப்படும்.

| | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | | | | | | | | 6609 | | | | |

**உதாரணம் 1**

மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் எண்ணினதும் மடக்கைப் பெறுமானத்தைக் காண்க. உரிய சுட்டி வடிவத்தையும் தருக.

(i) 6.85  (ii) 3.4  (iii) 8

(i) lg 6.85 = 0.8357, சுட்டி வடிவம் $6.58 = 10^{0.8357}$
(ii) lg 3.4 = 0.5315, சுட்டி வடிவம் $3.4 = 10^{0.5315}$ (3.4 = 3.40 எழுதுவதன் மூலம்)
(iii) lg 8 = 0.9031, சுட்டி வடிவம் $8 = 10^{0.9031}$

**பயிற்சி 20.1**

**1.** மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் எண்ணினதும் மடக்கைப் பெறுமானத்தைக் காண்க

(i) 7.32  (ii) 1.05  (iii) 9.99  (iv) 5.8  (v) 9.2  (vi) 3.1
(vii) 4  (viii) 7  (ix) 1  (x) 1.01

## 20.2 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள மூன்று தசம தானங்கள் வரையுள்ள எண்களின் மடக்கைப் பெறுமானங்கள்

1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள இரண்டு தசம தானங்கள் வரையுள்ள எண்ணொன்றின் மடக்கைப் பெறுமானத்தைப் பெற்றுக்கொள்ளும் முறையை இப்போது நாம் அறிவோம். இனி 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள 3 தசம தானங்களையுடைய ஓர் எண்ணின் மடக்கைப் பெறுமானத்தைக் காணும் முறையை அவதானிப்போம்.

இவ்வாறான மூன்று தசம தானங்களையுடைய எண்ணொன்றாகிய 5.075 இன் மடக்கைப் பெறுமானத்தை, அட்டவணையிலிருந்து பெற்றுக்கொள்ளும் முறையை அறிந்துகொள்வோம். 5.075 இல் முதல் இரண்டு இலக்கங்களினால் தரப்படும் எண்ணாகிய 50 இற்கு உரித்தாகும் நிரைக்கும் மூன்றாம் இலக்கமாகிய 7 உரித்தாகும் நிரலுக்கும் அமைவாக அட்டவணையில் 7050 பெறப்படுகின்றது. 5.075 இன் நான்காம் இலக்கமாகிய 5 இற்குரிய பெறுமானம் அதே நிரையில் இடைவித்தியாச நிரலில் இருந்து 4 பெறப்படுகின்றது.

| | | | | | | இடை வித்தியாசம் | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 50 | | | 7050 | | | | | | | 4 | | | | |

மேலும், 7050 ஐயும் 4 ஐயும் கூட்டுக. அப்போது,

$7050 + 4 = 7054$ என்பதால்

$\lg 5.075 = 0.7054$ ஆகும்.

இதன் சுட்டி வடிவம் $5.075 = 10^{0.7054}$ ஆகும்.

**உதாரணம் 2**

மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் எண்ணினதும் மடக்கைப் பெறுமானத்தைக் கண்டு உரிய சுட்டி வடிவத்தையும் எழுதுக.

(i) 1.099 (ii) 5.875 (iii) 9.071

(i) $\lg 1.099 = 0.0411$, சுட்டி வடிவம் $1.099 = 10^{0.041}$

(ii) $\lg 5.875 = 0.7690$, சுட்டி வடிவம் $5.875 = 10^{0.7690}$

(iii) $\lg 9.071 = 0.9576$, சுட்டி வடிவம் $9.071 = 10^{0.9576}$

**பயிற்சி 20.2**

**1.** மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் எண்ணினதும் மடக்கைப் பெறுமானத்தைக் கண்டு உரிய சுட்டி வடிவத்தையும் எழுதுக.

(i) 1.254 (ii) 3.752 (iii) 2.837 (iv) 8.032 (v) 9.998 (vi) 7.543

## 20.3 10 இலும் பெரிய எண்களின் மடக்கைப் பெறுமானங்கள்

1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள எண்களின் மடக்கைகள் மாத்திரம் மடக்கை அட்டவணையில் சேர்க்கப்பட்டிருந்தாலும், அதே அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி எந்தவோர் எண்ணினதும் (நான்கு இலக்கங்கள் வரை தரப்பட்டுள்ளபோது அல்லது மட்டந்தட்டிக் கொண்டபோது) மடக்கைப் பெறுமானத்தைப் பெறலாம். இங்கு பயன்படுத்தப்படும் முறையினைப் பார்ப்போம்.

**உதாரணம் 1**

54.37 இன் மடக்கைப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

**முறை** (i) $\lg\ 54.37 = \lg (5.437 \times 10^1)$ (விஞ்ஞானமுறைக் குறிபீட்டில் காட்டுதல்)

$= \lg 5.437 + \lg 10^1$ (மடக்கை விதிகளைப் பயன்படுத்துவதால்)

$= 0.7354 + 1$ (மடக்கை அட்டவணையிலிருந்து பெறுதல், 10 இன் மடக்கை 1 என்பதால்)

$= 1.7354$

**முறை** (ii) சுட்டிகளைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம்

$54.37 = 5.437 \times 10^1$

$= 10^{0.7354} \times 10^1$ ( அட்டவணையிலிருந்து பெறப்படும் பெறுமானத்தை 10 இன் சுட்டியாகவும் எழுதமுடியும் என்பதால்)

$= 10^{1.7354}$

$\therefore \lg\ 54.37 = 1.7354$

**உதாரணம் 2**

கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் எண்ணினதும் மடக்கைப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) 8.583 (ii) 85.83 (iii) 858.3 (iv) 8583

(i) $\lg 8.583 = \lg (8.583 \times 10^0) = \lg 8.583 + \lg 10^0 = 0.9337 + 0 = 0.9337$

(ii) $\lg 85.83 = \lg (8.583 \times 10^1) = \lg 8.583 + \lg 10^1 = 0.9337 + 1 = 1.9337$

(iii) $\lg 858.3 = \lg (8.583 \times 10^2) = \lg 8.583 + \lg 10^2 = 0.9337 + 2 = 2.9337$

(iv) $\lg 8583 = \lg (8.583 \times 10^3) = \lg 8.583 + \lg 10^3 = 0.9337 + 3 = 3.9337$

அட்டவணையில் இருந்து 85 ஆம் நிரையின் 8 ஆம் நிரலிலுள்ள பெறுமானமும் 3 ஆம் இடைவித்தியாச நிரையிலுள்ள ஒத்த பெறுமானமும் பெறப்படுவதால் இத்தசமக் கூட்டு மாறாது.

மேலேயுள்ள உதாரணத்தில் தரப்பட்டுள்ள 85.83 இன் மடக்கைப் பெறுமானமாகிய 1.9337 இல் 9337 என்னும் தசமப் பகுதியை மடக்கையின் **தசமக் கூட்டு** எனவும் தசமப் புள்ளிக்கு முன்னே உள்ள முழுவெண்ணாகிய 1 ஐச் **சிறப்பியல்பு** எனவும் அழைப்போம்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையை அவதானிக்கவும்.

| எண் | முழுவெண் பகுதியிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை | விஞ்ஞான முறைக் குறிப்பீடு | மடக்கை | மடக்கையின் சிறப்பியல்பு |
|---|---|---|---|---|
| 8.583 | 1 | $8.583 \times 10^0$ | 0.9337 | 0 |
| 85.83 | 2 | $8.583 \times 10^1$ | 1.9337 | 1 |
| 858.3 | 3 | $8.583 \times 10^2$ | 2.9337 | 2 |

அட்டவணையின்படி ஓர் எண்ணின் மடக்கையின் சிறப்பியல்பாவது, அவ்வெண்ணை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் எழுதும்போது பத்தின் வலுவிலுள்ள சுட்டி யாகும். 1 இலும் பெரிய எண்களின் முழுவெண்பகுதியிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையிலும் ஒன்று குறைவான பெறுமானமே மடக்கையின் சிறப்பியல்பாகும். இதன்படி 5.173 போன்ற முழுவெண் பகுதியில் ஓர் இலக்கத்தைக் கொண்டுள்ள ஓர் எண்ணின் மடக்கையின் சிறப்பியல்பு 0 ஆகும்.

**உதாரணம் 3**

மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வோர் எண்ணினதும் மடக்கைப் பெறுமானத்தைக் காண்க. அவற்றைச் சுட்டி வடிவிலும் எழுதுக.

(i) 69.34 (ii) 957.1 (iii) 1248

(i) lg 69.34 = 1.8409, சுட்டி வடிவம் $69.34 = 10^{1.8409}$

(ii) lg 957.1 = 2.9809, சுட்டி வடிவம் $957.1 = 10^{2.9809}$

(iii) lg 1248 = 3.0962, சுட்டி வடிவம் $1248 = 10^{3.0962}$

**பயிற்சி 20.3**

**1.** மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி மடக்கைப் பெறுமானத்தைக் கண்டு, அவற்றைச் சுட்டி வடிவிலும் எழுதுக.

(i) 59.1 (ii) 100.2 (iii) 95.41 (iv) 1412 (v) 592.1 (vi) 890

**2.** $10^{0.9940} = 7.832$ ஆயின் கீழே தரப்பட்டுள்ளவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

(i) lg 7.832 (ii) lg 78.32 (iii) lg 7832

## 20.4 முரண் மடக்கை

மடக்கை அட்டவணையின்படி lg 59.3 = 1.7731 ஆகும். அதாவது 59.3 இன் மடக்கைப் பெறுமானம் 1.7731 ஆகும்.

1.7731 ஐ மடக்கைப் பெறுமானமாகக் கொண்டது 59.3 ஆகும். இது 1.7731 இன் முரண்மடக்கை 59.3 எனக் கூறப்படும். antilog 1.7731 = 59.3 என இது எழுதப்படும். இனி மடக்கை அட்டவணையில் இடைவித்தியாசப் பகுதியும் சேர்ந்ததாகவுள்ள முரண்மடக்கையைப் பெற்றுக்கொள்ளும் முறை பற்றிப் பார்ப்போம்.

**உதாரணம் 1**

antilog 0.8436 இன் பெறுமானத்தை மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

| | | | | | | | | | | | இடை வித்தியாசம் | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 69 | ←- - - - | - - - | - - - | - - - | - - - | - - - | - - - | ↑ 8432 | | | | | | | | ↑ 4 | | | |

antilog 0.8436 = 6.976

மேலேயுள்ள அட்டவணையிலிருந்து 0.8436 இன் முரண் மடக்கையைக் கண்ட முறையை இவ்வாறு விபரிக்கலாம். அப்பெறுமானம் அட்டவணையில் இல்லாததால் அதற்குக் குறைந்த கிட்டிய பெறுமானமாகிய 8432 என்பது 69 இன் நிரையில் 7 ஆவது நிரலில் உள்ளது. குறைவாகும் பெறுமானமாகிய 4 (= 8436 − 8432) என்பது இடைவித்தியாசத்தில் 6 இன் நிரலில் உள்ளது. இதற்கேற்ப தேவையான முரண் மடக்கை 6.976 ஆகும். (0.8436 இன் சிறப்பியல்பு 0 என்பதால்) மடக்கையின் சிறப்பியல்பு 0 ஆகும்போது, முரண் மடக்கையானது மேற்குறித்த உதாரணத்திலுள்ளது போன்று அட்டவணையில் பெற்றுக்கொண்ட முறையிலேயே 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள ஓர் எண்ணாக நேரடியாகவே எழுதலாம். ஆயினும் சிறப்பியல்பானது 0 இலும் கூடியதாகும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்தில் உள்ளவாறு முரண் மடக்கையைக் காண்போம்.

**உதாரணம் 2**

antilog 1.8436 இன் பெறுமானம் காண்க.

antilog 1.8436 $= 6.976 \times 10^1$ (தசமக்கூட்டிலிருந்து 6.976 உம் சிறப்பியல்பிலிருந்து $10^1$ இன் 1)

$= 69.76$ (10 ஆல் பெருக்குவதால் ஒரு தசமதானம் வலப் பக்கம் செல்கிறது.)

**உதாரணம் 3**

மடக்கை அட்டவணையிலிருந்து பெறுமானம் காண்க.

(i) antilog 1.5432 (ii) antilog 2.5432 (iii) antilog 3.5432

(i) antilog 1.5432 $= 3.493 \times 10^1 = 34.93$

(ii) antilog 2.5432 $= 3.493 \times 10^2 = 349.3$

(iii) antilog 3.5432 $= 3.493 \times 10^3 = 3493$

**பயிற்சி 20.4**

**1.** மடக்கை அட்டவணையிலிருந்து பெறுமானம் காண்க.

(i) antilog 0.7350 (ii) antilog 2.4337 (iii) antilog 3.5419
(iv) antilog 1.0072 (v) antilog 2.9114 (vi) antilog 3.8413

**2.** lg $x = 0.7845$ ஆயின்,

(i) $x$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) antilog 1.7845 என்பதை விஞ்ஞான முறைக் குறிப்பீட்டில் காட்டிப் பெறுமானம் காண்க.

(iii) antilog 2.7845 இன் பெறுமானம் காண்க.
(iv) $\lg 10y = 0.7845$ ஆயின் $y$ இன் பெறுமானம் காண்க.

## 20.5 மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி 1 இலும் பெரிய எண்களின் பெருக்கல்களையும் வகுத்தல்களையும் செய்தல்

$\lg (MN) = \lg M + \lg N$ , $\lg\left(\frac{M}{N}\right) = \lg M - \lg N$ உம் என மடக்கை விதிகளில் நாம் கற்றோம். இதுவரை கற்ற மடக்கையைப் பயன்படுத்தியும் இவ்விதிகளைப் பிரயோகித்தும் எண்களில் பெருக்கலையும் வகுத்தலையும் செய்யும் முறையை இப்போது பார்ப்போம்.

**உதாரணம் 1**

மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி பெறுமானம் காண்க.

(i) $4.975 \times 10.31$ (ii) $53.21 \div 4.97$

(i) $4.975 \times 10.31$

$P = 4.975 \times 10.31$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg P = \lg (4.975 \times 10.31)$
$= \lg 4.975 + \lg 10.31$ (மடக்கை விதி)
$= 0.6968 + 1.0132$ (மடக்கை அட்டவணையிலிருந்து)
$= 1.7100$
$\therefore P = \text{antilog } 1.7100$
$= 51.28$
$\therefore 4.975 \times 10.31 = 51.28$

$4.975 \times 10.31 = 51.28$ சுட்டிகளைப் பயன்படுத்தியும் இப்பெருக்கத்தைப் பெறலாம்.

$4.975 \times 10.31 = 10^{0.6968} \times 10^{1.0132}$ (மடக்கை அட்டவணையிலிருந்து)
$= 10^{1.7100}$ ( இரண்டு சுட்டிகளின் கூட்டல் )
$= 10^{0.7100} \times 10^{1}$
$= 5.128 \times 10^{1}$ (மடக்கை அட்டவணையிலிருந்து முரண்மடக்கை)
$= 51.28$

(ii) $53.21 \div 4.97$

$P = 53.21 \div 4.97$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\lg(P) = \lg (53.21 \div 4.97)$
$= \lg 53.21 - \lg 4.97$
$= 1.7260 - 0.6964$
$= 1.0296$
$\therefore P = \text{antilog } 1.0296$
$= 1.071 \times 10^{1}$
$= 10.71$

| சுட்டிகளைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கல் |
|---|
| $53.21 \div 4.97 = 10^{1.7260} \div 10^{0.6964}$ |
| $= 10^{1.7260 - 0.6964}$ |
| $= 10^{1.0296}$ |
| $= 1.071 \times 10^{1}$ |
| $= 10.71$ |

பெருக்கலும் வகுத்தலும் அடங்கிய கோவைகளின் பெறுமானத்தைக் காணும் விதத்தைப் பார்ப்போம்.

**உதாரணம் 2**

$\dfrac{594.2 \times 9.275}{84.21}$ மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி பெறுமானம் காண்க.

$P = \dfrac{594.2 \times 9.275}{84.21}$ ஐச் சுருக்குவோம்.

$$\therefore \lg P = \lg\left(\frac{594.2 \times 9.275}{84.21}\right)$$

$$= \lg(594.2 \times 9.275) - \lg 84.21$$

$$= \lg 594.2 + \lg 9.275 - \lg 84.21$$

$$= 2.7739 + 0.9673 - 1.9254$$

$$= 1.8158$$

$$\therefore P = \text{antilog}\, 1.8158$$

$$P = 6.543 \times 10^1$$

$$= 65.43$$

**பயிற்சி 20.5**

**1.** மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி பெறுமானம் காண்க.

(i) $54.3 \times 1.75$ (ii) $323.8 \times 2.832$ (iii) $54.1 \times 27.15 \times 43$

(iv) $523.2 \div 93.75$ (v) $43.17 \div 8.931$ (vi) $\dfrac{73.1 \times 25.41}{18.32}$

(vii) $\dfrac{85.72 \times 58.1}{29.73}$ (viii) $\dfrac{112.8 \times 73.45}{82.11}$ (ix) $\dfrac{953.1 \times 457}{23.25 \times 99.8}$

**2.** ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவு $c = 2\pi r$ என்னும் சூத்திரத்தினால் தரப்படும். $\pi = 3.142$, $r = 10.5$ cm ஆயின் $c$ இன் பெறுமானத்தை மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

**3.** ஓர் உருளையின் வளைந்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $A = 2\pi rh$ என்னும் சூத்திரத்தினால் தரப்படும் $\pi = 3.142$ cm, $r = 5.31$ cm, $h = 20$ cm ஆயின் மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி $A$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

## 19.7 கணிகருவி

கணிகருவி கணித்தலை இலகுவாக்குவதற்காகவும் விரைவாகச் செய்வதற்காகவும் 19 ஆம் நூற்றாண்டில் உலகுக்கு அறிமுகஞ் செய்யப்பட்ட அதி உன்னத படைப்பாகும். அதனைத் தயார்செய்த பெருமை சார்ளஸ் பெபேஜ் என்னும் கணிதவியலாளரையே சாரும்.

சாதாரண கணிகருவி, விஞ்ஞானக் கணிகருவி என இரண்டு வகைக் கணிகருவிகள் உள்ளன. சாதாரண கணிகருவியில் கணித்தலுக்கான கணிதச் செய்கைகள் நாம் வழங்கும் ஒழுங்கிலேயே செய்யப்படும். ஆயினும் விஞ்ஞானக் கணிகருவியில் கணிதச் செய்கைகள் அடிப்படை விதிகளுக்கேற்பச் செய்யப்படுகின்றன.

கணிகருவியில் இயக்குவதற்காக ஒரு சாவிப் பலகையும் உரிய விடைகள் காட்சிப்படுத்தப்படுவதற்காக ஒரு காட்சித்திரையும் உள்ளன. ஒரு கணிகருவியில் ஒவ்வொரு சாவியின் மூலமும் செய்யப்படும் செயல் கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

| சாவி | செய்யப்படும் செயல் |
|---|---|
| ON | கணிகருவிக்கு மின்சாரத்தை வழங்கி இயக்கத்தை ஆரம்பித்தல். |
| OFF | மின்சாரம் துண்டிக்கப்பட்டு இயங்குவது நிறுத்தப்படும். |
| CE | காட்சித்திரையில் இறுதிக் குறிப்பை அழித்தல். |
| AC | காட்சித்திரையில் அனைத்தையும் அழித்தல். |
| + − × ÷ | கணிதச் செய்கைகளின் தேவைக்கேற்ப இயக்கலாம். |
| 3 4 5 6 8 7 9 2 1 0 | தேவைக்கேற்ப எண்களைப் பெறுதல். |
| = | கணிதச் செய்கையின் விடையை திரையில் காட்சிப்படுத்தும். |
| . | தசம எண்களுக்காக தேவையானவாறு தசமப் புள்ளியை இடுதல். |
| ( | அடைப்புக்குள்ளே உள்ள பகுதிகளை ஆரம்பித்தல். |
| ) | அடைப்புக்குள்ளே உள்ள பகுதிகளை முடித்தல். |

**உதாரணம்** 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கணித்தலையும் கணிகருவி மூலம் செய்வதற்கு கணிகருவிச் சாவிகளை இயக்கவேண்டிய ஒழுங்கை எழுதுக. காட்சித்திரையின்மீது தரப்படும் விடையினையும் எழுதுக.

(i) $46 + 127$ (ii) $59 - 27$ (iii) $5.4 + 4.1 - 0.7$

(iv) $7.5 \times 23$ (v) $(2.7 + 42.3) \div 15$

(i) ON 4 6 + 1 2 7 = 173

(ii) ON 5 9 – 2 7 = 32

(iii) ON 5 . 4 + 4 . 1 – 0 . 7 = 8.8

(iv) ON 7 . 5 × 2 3 = 172.5

(v) ON ( 2 . 7 + 4 2 . 3 ) ÷ 1 5 = 3

**பயிற்சி 20.6**

**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள கணித்தல்களுக்காகக் கணிகருவியின் சாவிகளை இயக்க வேண்டிய ஒழுங்கு முறையினை எழுதுக. காட்சித்திரையின் மீது பெறப்படும் விடையையும் எழுதுக.

(i) $543 + 275 \times 17$ (ii) $2003 - 125$ (iii) $25.1 + 3.04 - 1.1$
(iv) $57.3 \times 1.75 + 45.3$ (v) $49.5 \div 15$ (vi) $(32.1 \times 4.3) + 1.5$

**2.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையையும் மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக. கணிகருவியின் சாவிகளை இயக்கி அதே கோவைகளின் பெறுமானங்களைப் பெறுக. இரண்டு சந்தர்ப்பங்களிலும் பெறப்படும் விடைகள் எத்தனை தசம தானங்கள் வரை சரியாக உள்ளன எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

(i) $42.7 \times 39.25$ (ii) $514.1 \div 31.7$ (iii) $\frac{372.1 \times 4.3}{59.25}$
(iv) $\frac{753 \times 1.4}{101.5}$ (v) $(12.5 \times 62.4) \div 253.2$

**பலவினப் பயிற்சி**

**1.** $\log_4 64 + \log_3 81 - \log_5 5 + 1$ இன் பெறுமானம் காண்க.

**2.** $\lg 6.143 = 0.7884$ ஆயின் கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானம் காண்க.

(i) $10^{0.7884}$ (ii) $10^{1.7884}$ (iii) $10^{2.7884}$

**3.** $10^{0.6582} = 4.552$ ஆயின் கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானம் காண்க.

(i) $\lg 4.552$ (ii) $\lg 45.52$ (iii) $\lg 455.2$

**4.** antilog 1.6443 = 44.08 ஆயின் கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானம் காண்க.

(i) antilog 0.6443 (ii) antilog 2.6443 (iii) antilog 3.6443

**5.** (i) $\lg a = x$ , $\lg b = 2x$ ஆயின் $\lg(ab)$ இன் பெறுமானத்தை $x$ இன் சார்பிற் தருக.

(ii) $\lg x = 0.9451$, $\lg y = 0.8710$ ஆயின் $\lg\left(\frac{x}{y}\right)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

**6.** மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக. பெறப்பட்ட விடைகள் சரியானவையா என்பதைக் கணிகருவியைப் பயன்படுத்திப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

(i) $\frac{38.72 \times 1.003}{5.1}$ (ii) $\frac{5.432 \times 989.1}{379.1}$ (iii) $\frac{785.8}{27.2 \times 3.8}$

(iv) $\frac{75.23 \times 131.2}{5.74 \times 95.2}$ (v) $\frac{5.743 \times 83.21 \times 5.91}{12.75 \times 4.875}$ (vi) $\frac{573 \times 2.123 \times 6.1}{9.875 \times 54.21}$

# 21 வரைபுகள்

**இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,**

- ஒரு நேர்கோட்டு வரைபின் படித்திறனைக் காண்பதற்கும்
- $y = ax^2 + b$ வடிவிலான ஒரு சார்பினை வரைவதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

## $y = mx + c$ வடிவிலான ஒரு சார்பின் வரைபு

$y = mx + c$ வடிவிலான சார்பின் வரைபு ஒரு நேர்கோடாகும். $x$ இன் குணகமாகிய $m$ இனால் கோட்டின் படித்திறனும் மாறா உறுப்பாகிய $c$ இனால் கோட்டின் வெட்டுத் துண்டும் குறிப்பிடப்படும்.

**மீட்டற் பயிற்சி**

**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளினால் வகைகுறிக்கப்படும் நேர்கோடுகளின் படித்திறனையும் வெட்டுத்துண்டையும் காண்க.

(i) $y = 3x + 2$ (ii) $y = -3x + 2$ (iii) $y = 5x - 3$

(iv) $y = 4x$ (v) $y = -5x$ (vi) $y = \frac{1}{2}x - 3$

(vii) $y = \frac{1}{2}x + 3$ (viii) $y = \frac{-2}{3}x - 1$ (ix) $2y = 4x + 5$

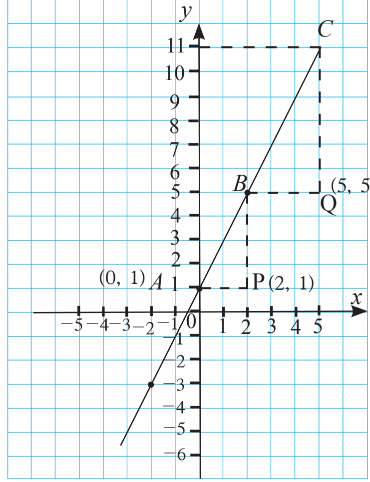
(x) $2y - x = 5$ (xi) $2y + 3 = 2x$ (xii) $\frac{1}{3}y - 5 = x$

## 21.1 கேத்திரகணித ரீதியில் நேர்கோட்டு வரைபின் படிதிறனைக் காணல்

$y = mx + c$ என்னும் நேர்கோட்டின் $x$ இன் குணகமாகிய $m$ என்பதை கோட்டின் படித்திறன் என நாம் வரைவிலக்கணப்படுத்துவோம். இனி $m$ இன் பெறுமானம் கேத்திரகணித ரீதியில் குறிக்கப்படும் முறையை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் பார்ப்போம். இதற்கென $y = 2x + 1$ என்னும் நேர்கோட்டை அவதானிப்போம். இதன் வரைபை வரைவதற்கு கீழே தரப்பட்டுள்ள பெறுமான அட்டணையைப் பயன்படுத்துவோம்.

| $x$ | $-2$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $y\ (= 2x + 1)$ | $-3$ | $1$ | $5$ |

கோட்டின் மீது யாதேனும் மூன்று புள்ளிகளைக் குறிப்போம். அம்மூன்று புள்ளிகளையும் $A$ (0, 1), $B$ (2, 5) , $C$ (5, 11) எனக்கொள்வோம்.




முதலில் $A$ இலிருந்து $x-$ அச்சுக்கு சமாந்தரமாகவும் $B$ இலிருந்து $y-$ அச்சுக்கு சமாந்தரமாகவும் கோடுகளை வரைந்து அவை சந்திக்கும் புள்ளியை $P$ எனப் பெயரிடுவோம். அப்போது புள்ளி $P$ இன் ஆள்கூறுகள் (2, 1) என்பது தெளிவாகின்றது.

மேலும், $AP = 2 - 0$

$= 2$

$BP = 5 - 1$

$= 4$

இனி $A$ , $B$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள,

$$\frac{\text{நிலைகுத்துத் தூரம்}}{\text{கிடைத் தூரம்}} = \frac{BP}{AP} = \frac{4}{2} = 2$$

$y = 2x + 1$ என்னும் சார்பின் படித்திறன் 2 என்பதை நாம் அறிவோம்.

$\frac{\text{நிலைகுத்துத் தூரம்}}{\text{கிடைத் தூரம்}}$ என்பதால் கிடைக்கும் ஈவும் 2 ஆகும்.

இனி மீண்டும் புள்ளி $B$ இலிருந்து $x-$ அச்சுக்கு சமாந்தரமாகவும் புள்ளி $C$ இலிருந்து $y-$ அச்சுக்கு சமாந்தரமாகவும் கோடுகளை வரைந்து அக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியை $Q$ எனப் பெயரிடுவோம்.

அப்போது $Q$ இன் ஆள்கூறுகள் = (5, 5) ஆகும்.

$BQ = 5 - 2$

$= 3$

$CQ = 11 - 5$

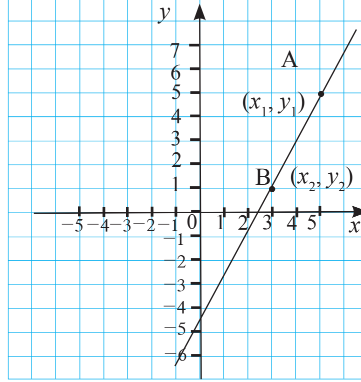
$= 6$

இனி $B$ , $C$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள,

$$\frac{\text{நிலைகுத்துத் தூரம்}}{\text{கிடைத் தூரம்}} = \frac{CQ}{BQ} = \frac{6}{3} = 2$$

இரண்டு சந்தர்ப்பங்களிலும் கவனத்தில்கொண்ட இரண்டு புள்ளிகளிலும் நிலைக்குத்துத் தூரத்துக்கும் கிடைத் தூரத்துக்கும் உள்ள விகிதமாகப் பெறப்பட்டது நேர்கோட்டின் படித்திறன் 2 ஆகும்.

$y = mx + c$ என்னும் சமன்பாட்டைக் கருதி படித்திறனைக் காண்பதற்கான சூத்திரத்தைப் பெறுவோம்.




நேர்கோட்டின் மீது யாதாயினும் $A\,(x_1, y_1)$ , $B\,(x_2, y_2)$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளைக் கருதுவோம்.

$$y_1 = mx_1 + c \quad \text{———} \quad ①$$

$$y_2 = mx_2 + c \quad \text{———} \quad ②$$

$$① - ② \qquad y_1 - y_2 = mx_1 - mx_2$$

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m$$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \text{ நேர்கோட்டு வரைபின் படிதிறன்} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

**உதாரணம்** 1

ஒரு நேர்கோட்டின் மீது அமைந்துள்ள இரண்டு புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் (3, 10) , (2, 6) ஆகும். நேர்கோட்டின் படித்திறனைக் காண்க.

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

கோட்டின் படித்திறன் $= \frac{10-6}{3-2}$

$= \frac{4}{1}$

$= 4$

**உதாரணம்** 2

ஒரு நேர்கோட்டின் மீது அமைந்துள்ள இரண்டு புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் (6, 3), (2, 5) ஆகும். நேர்கோட்டின் படித்திறனைக் காண்க.

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

கோட்டின் படித்திறன் $= \frac{3-5}{6-2}$

$= \frac{-2}{4}$

$= \frac{-1}{2}$

**உதாரணம்** 3

(–2, 4) , (1, –2) ஆகிய புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் படித்திறனைக் காண்க.

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

கோட்டின் படித்திறன் $= \frac{4-(-2)}{(-2)-1}$

$= \frac{4+2}{-3}$

$= \frac{6}{-3}$

$= -2$

**பயிற்சி 21.1**

**1.** தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் படித்திறனைக் காண்க.

(i) (4, 6), (2, 2) (ii) (6, 2), (4, 3) (iii) (1, –2) (0, 7)

(iv) (–2, –3), (2, 5) (v) (4, 5), (–8, –4) (vi) (6, –4), (2, 2)

(vii) (1, –4) (–2, –7) (viii) (4, 6), (–2, –9)

## 21.2 ஒரு நேர்கோட்டு வரைபின் வெட்டுத்துண்டும் ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறும் தரப்படும்போது நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காணல்

**உதாரணம்** 1

ஒரு நேர்கோட்டு வரைபின் வெட்டுத்துண்டு 3 ஆகும். வரைபின் மீது அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (2, 7) ஆகும். வரைபின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

படிதிறன் $m$ உம் வெட்டுத்துண்டு $c$ உம் உடைய ஒரு வரைபின் சார்பு $y = mx + c$ ஆகும். தரப்பட்டுள்ள வெட்டுத்துண்டையும் வரைபின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளியின் ஆள்கூறையும் சார்பின் சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால்,

$$y = mx + c$$
$$7 = 2m + 3$$
$$7 - 3 = 2m$$
$$4 = 2m$$
$$m = \frac{4}{2}$$
$$m = 2$$

சார்பின் சமன்பாட்டில் $c = 3, m = 2$ ஆகியவற்றைப் பிரதியிடுவதால்,

$y = 2x + 3$ ஆகும்.

**பயிற்சி 21.2**

**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள வெட்டுத்துண்டையும் தரப்பட்டுள்ள புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதுமான வரைபுகளின் சார்புகளை எழுதுக.
   (i) வெட்டுத்துண்டு 1, ஆள்கூறுகள் (3, 10)
   (ii) வெட்டுத்துண்டு 2, ஆள்கூறுகள் (3, 3)
   (iii) வெட்டுத்துண்டு 5, ஆள்கூறுகள் (2, 1)
   (iv) வெட்டுத்துண்டு 0, ஆள்கூறுகள் (3, 12)
   (v) வெட்டுத்துண்டு − 4, ஆள்கூறுகள் (3, 8)
   (vi) வெட்டுத்துண்டு −5, ஆள்கூறுகள் (−2, −9)

## 21.3 தரப்பட்டுள்ள இரண்டு புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காணல்

(1, 7) , (3, 15) ஆகிய புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்போம். சமன்பாட்டைக் காண்பதற்காக வரைபின் படித்திறன், வெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றைக் காண்போம்.

முதலில் (1, 7) , (3, 15) ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து கோட்டின் படித்திறனைக் காண்போம்.

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$m = \frac{7-15}{1-3}$$

$$m = \frac{-8}{-2}$$

$$m = 4$$

சமன்பாடு $y = mx + c$ இல் $m$ இன் பெறுமானத்தையும் தரப்பட்டுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் பிரதியிடுவோம்.

$x = 1$ , $y = 7$ , $m = 4$

$$y = mx + c$$

$$7 = 4 + c$$

$$7 - 4 = c$$

$$3 = c$$

$$c = 3$$

$m = 4$ , $c = 3$

வரைபின் படித்திறன் 4 உம் வெட்டுத்துண்டு 3 உம் ஆகும்.
எனவே தேவையான சமன்பாடு $y = 4x + 3$ ஆகும்.

**உதாரணம்** 1

(4, 3) , (2, –1) ஆகிய புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$\text{படித்திறன்} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{3-(-1)}{4-2}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= 2$$

சமன்பாடு $y = mx + c$ இல் புள்ளி (2, –1) இன் ஆள்கூறுகளையும் படித்திறனையும் பிரதியிடுவதால்,

$$x = 2 \ , \ y = -1 \ , \ m = 2$$
$$y = mx + c$$
$$-1 = 2 \times 2 + c$$
$$-1 = 4 + c$$
$$-1 - 4 = c$$
$$-5 = c$$
$$c = -5$$

∴ நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = 2x - 5$ ஆகும்.

**பயிற்சி 21.3**

**1.** தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் ஒவ்வொரு வரைபின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

(i) (1, 7) (2, 10) (ii) (3, –1) (–2, 9) (iii) (4, 3) (8, 4)
(iv) (2, –5) (–2, 7) (v) (–1, –8) (3, 12) (vi) (–5, 1) (10, –5)
(vii) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\left(1, 1\frac{1}{3}\right)$ (viii) (2, 2) (0, –4)

## 21.4 $y = ax^2$ வடிவிலான சார்புகளின் வரைபுகள்

இனி $y = ax^2$ வடிவிலான வரைபுகளின் சில அடிப்படைப் பண்புகளை அறிந்துகொள்வோம்.

இங்கு $a$ என்பது பூச்சியமல்லாத ஓர் எண்ணாகும். இங்கு சார்பு $y$ ஆகும். $y$ ஆனது $ax^2$ இனால் தரப்படுகின்றது.
தற்போது $y = x^2$ இன் வரைபை வரைவோம்.
அதற்கு பின்வரும் படிமுறைகளைப் பின்பற்றுவோம்.

**படிமுறை** 1
சார்பின் $x$ பெறுமானங்களுக்கு ஒத்த $y$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்பதற்காக பெறுமான அட்டவணையொன்றைத் தயாரிப்போம்.

$y = x^2$

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| $y$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

பெறுமான அட்டவணையிலிருந்து சார்பின் வரைபை வரைவதற்குத் தேவையான புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைப் பெற்றுக்கொள்வோம்.
(–3, 9), (–2, 4), (–1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)

**படிமுறை** 2

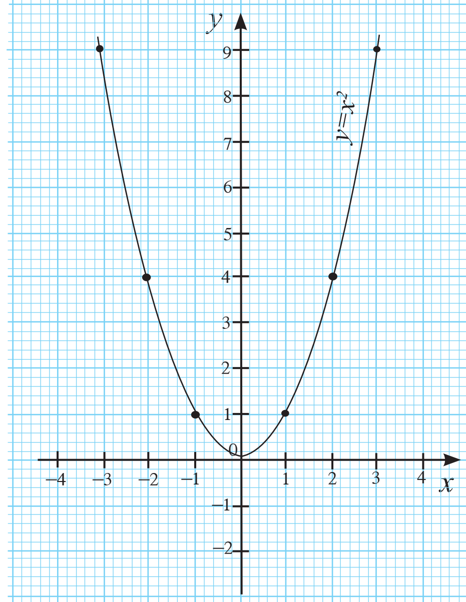
பெற்றுக்கொண்ட ஆள்கூறுகளைக் குறிப்பதற்கு ஆள்கூற்றுத் தளமொன்றைத் தயாரிப்போம். பெற்றுக்கொண்ட ஆள்கூறுகளில் $x$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் 3 உம் இழிவுப் பெறுமானம் $-3$ ஆகும். $y$ ஆள்கூறுகளின் உயர்வுப் பெறுமானம் 9 உம் இழிவுப் பெறுமானம் 0 உம் ஆகும்.

வரைபை வரைவதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு தாளில் பொருத்தமான அளவிடையில் $x$ அச்சில் $-3$ இலிருந்து $+3$ வரையும் $y$ அச்சில் 0 இலிருந்து 9 வரையும் எண்களை இடக்கூடியவாறு $x$ , $y$ ஆகிய அச்சுகளை வரைந்துகொள்வோம்.

**படிமுறை** 3

சார்பின் வரைபை வரைதல்

தயாரித்துக்கொண்ட ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் (–3, 9), (–2, 4), (–1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9) ஆகிய ஆள்கூறுகளால் தரப்படும் புள்ளிகளைக் குறிக்க. குறித்த புள்ளிகளை ஒழுங்காக ஒப்பமாக இணைக்க. அப்போது பெறப்படும் ஒப்பான வளையி $y = x^2$ என்னும் சார்பின் வரைபாகும்.




$y = ax^2$ வடிவிலான ஒரு சார்பின் வரைபாகப் பெறப்படும் வளையி **பரவளைவு** என அழைக்கப்படும்.

வரையப்பட்ட வரைபிலிருந்து சார்பு $y = x^2$ இன் வரைபின் சில பண்புகளை அறிந்துகொள்வோம்.

சார்பு $y = x^2$ இன்

- வரைபு $y$ அச்சைப் பற்றி சமச்சீரானதாகும். எனவே வரைபின் சமச்சீர் அச்சு $y$ அச்சாக இருப்பதுடன் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.

- $x$ இன் பெறுமானம் மறையாக அதிகரிக்கும்போது (அட்டவணைகேற்ப $-3 < x < 0$) சார்பு நேராகக் குறைகின்றது. $x$ ஆனது நேராக அதிகரிக்கும்போது (அட்டவணைகேற்ப $0 < x < 3$) சார்பு நேராக அதிகரிகின்றது.

$a > 0$ ஆகும்போது $y = ax^2$ என்னும் வடிவிலான சார்புகளின் பொதுப் பண்புகளை அறிந்துகொள்வதற்காக $y = x^2$, $y = 3x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ ஆகிய சார்புகளின் வரைபுகளை ஒரே ஆள்கூற்றுத்தளத்தில் வரைவோம்.

$y = 3x^2$

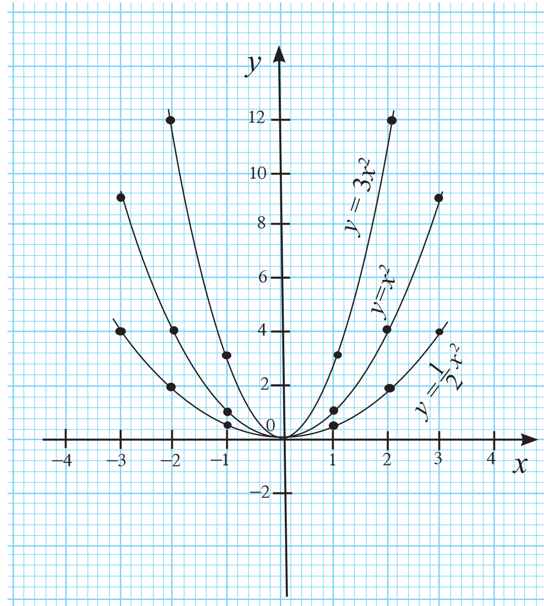
| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| $3x^2$ | 12 | 3 | 0 | 3 | 12 |
| $y$ | 12 | 3 | 0 | 3 | 12 |

$(-2, 12), (-1, 3), (0, 0), (1, 3), (2, 12)$

$y = \frac{1}{2}x^2$

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| $\frac{1}{2}x^2$ | 2 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 2 |
| $y$ | 2 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 2 |

$(-2, 2), (-1, \frac{1}{2}), (0, 0), (1, \frac{1}{2}), (2, 2)$




மேலே தரப்பட்டுள்ள வரைபுகளிலிருந்து ($a > 0$) ஆகும்போது $y = ax^2$ என்னும் வடிவிலான சார்புகளின் வரைபுகளின் சில பொதுப் பண்புகளை அறிந்துகொள்வோம்.

- வரைபானது இழிவுப் புள்ளியுடனான ஒரு பரவளைவாகும்.
- இழிவுப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் (0, 0) ஆகும்.

- வரைபானது $y$ அச்சைப் பற்றி சமச்சீரானதாகும்.
- சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.
- சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம் (அதாவது $y$ இன் பெறுமானம்) 0 ஆகும்.
- $x$ இன் பெறுமானம் மறையாக அதிகரிக்கும்போது ($x$– அச்சின் விழியே) சார்பின் பெறுமானம் நேராக குறைந்து $x = 0$ ஆகும்போது சார்பும் 0 ஆகும்.
- $x$ இன் பெறுமானம் நேராக அதிகரிக்கும்போது சார்பு 0 இலிருந்து நேராக அதிகரிக்கும்.

$a < 0$ ஆகும்போது $y = ax^2$ என்னும் வடிவிலான சார்புகளின் வரைபுகளின் பண்புகளை அறிந்துகொள்வதற்காக $y = -x^2$ , $y = -2x^2$ , $y = -\frac{1}{2}x^2$ ஆகிய சார்புகளின் வரைபுகளை ஒரே ஆள்கூற்றுத்தளத்தில் வரைவோம்.

$y = -x^2$

| $x$ | – 3 | – 2 | – 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| $-x^2$ | – 9 | – 4 | – 1 | 0 | –1 | – 4 | – 9 |
| $y$ | – 9 | – 4 | – 1 | 0 | –1 | – 4 | – 9 |

(–3, –9) (–2, –4) (–1, –1) (0,0) (1, –1) (2,–4) (3,–9)

$y = -2x^2$

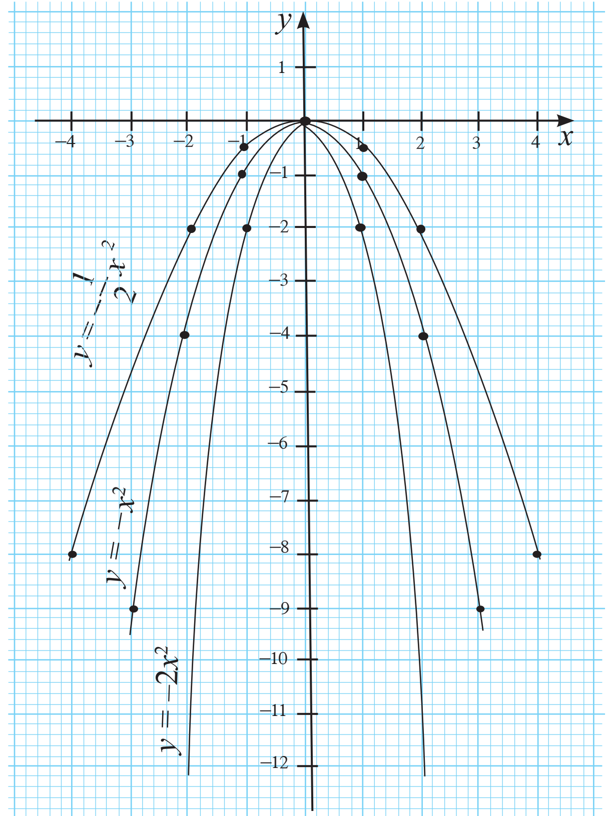
| $x$ | – 2 | – 1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| $(-2x^2)$ | – 8 | – 2 | 0 | – 2 | – 8 |
| $y$ | – 8 | – 2 | 0 | – 2 | – 8 |

(–2, –8) (–1, –2) (0, 0) (1, –2) (2, –8)

$y = -\frac{1}{2}x^2$

| $x$ | – 4 | – 2 | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 16 | 4 | 0 | 4 | 16 |
| $-\frac{1}{2}x^2$ | – 8 | – 2 | 0 | – 2 | – 8 |
| $y$ | – 8 | – 2 | 0 | – 2 | – 8 |

(–4, –8) (–2, –2) (0, 0) (2, –2) (4, –8)



தரப்பட்டுள்ள வரைபுகளிலிருந்து $a$ ஆனது ஒரு மறைப் பெறுமானத்தை எடுக்கும்போது $y = ax^2$ என்னும் வடிவிலான வரைபுகளின் பொதுப் பண்புகளை அறிந்துகொள்வோம்.

- வரைபானது உயர்வுப் புள்ளியுடனான ஒரு பரவளைவாகும்.
- உயர்வுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (0, 0) ஆகும்.
- வரைபானது $y$ அச்சைப் பற்றிச் சமச்சீரானதாகும்.
- சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.
- சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானம் 0 ஆகும்.
- $x$ இன் பெறுமானம் மறையாக அதிகரிக்கும்போது ($x$– அச்சின் வழியே) சார்பின் பெறுமானம் மறையாக அதிகரித்து $x = 0$ ஆகும்போது சார்பும் 0 ஆகும்.
- $x$ இன் பெறுமானம் நேராக அதிகரிக்கும்போது சார்பு 0 இலிருந்து மறையாகக் குறைகின்றது.

மேலே வரையப்பட்ட வரைபுகளுக்கேற்ப, $y = ax^2$ என்னும் வடிவிலான சார்புகளின் வரைபுகளின் அடிப்படைப் பண்புகளை அறிந்துகொள்வோம். $a$ ஆனது பூச்சியமல்லாத ஓர் எண்ணாகும்.

$y = ax^2$ என்னும் வடிவிலான சார்புகளின்

- வரைபானது பரவளைவாகும்.
- வரைபானது $y$ அச்சைப் பற்றி சமச்சீரானதாகும். எனவே வரைபுகளின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.
- வரைபுகளின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (0, 0) ஆகும்.
- $x^2$ இன் குணகமானது ''நேர்''ப் பெறுமானமொன்றை எடுக்கும்போது வரைபானது இழிவுப் புள்ளியையுடைய ஒரு பரவளைவாகும்.
- $x^2$ இன் குணகமானது ''மறை''ப் பெறுமானமொன்றை எடுக்கும்போது வரைபானது உயர்வுப் புள்ளியையுடைய ஒரு பரவளைவாகும்.

**உதாரணம்** 1

சார்பை பரீட்சித்துப் பார்த்து $y = \frac{2}{3}x^2$ என்னும் சார்பின்

(i) வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாட்டை எழுதுக.
(ii) வரைபின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.
(iii) வரைபு இழிவுப் புள்ளியையா, உயர்வுப் புள்ளியையா உடையது என எழுதுக.

(i) வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.
(ii) வரைபின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (0, 0) ஆகும்.
(iii) சார்பில் $x^2$ இன் குணகம் நேர்ப் பெறுமானம் என்பதால் வரைபு இழிவுப் புள்ளியை உடையது.

**உதாரணம் 2**

சார்பை பரீட்சித்துப் பார்த்து $y = -4x^2$ என்னும் சார்பின்
(i) வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாட்டை எழுதுக.
(ii) வரைபின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.
(iii) வரைபு இழிவுப் புள்ளியையா, உயர்வுப் புள்ளியையா உடையது என எழுதுக.

சார்பு $y = ax^2$ என்னும் வடிவிலான சார்பு என்பதால்
(i) சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.
(ii) வரைபின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (0, 0) ஆகும்.
(iii) சார்பில் $x^2$ இன் குணகம் மறைப் பெறுமானம் என்பதால் வரைபு உயர்வுப் புள்ளியை உடையதாகும்.

**பயிற்சி 21.4**

**1.** சார்பை அவதானிப்பதன்மூலம் கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

| சார்பு | திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் | $y$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் | $y$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் | சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு |
|---|---|---|---|---|
| $y = 5x^2$ | | | | |
| $y = -7x^2$ | | | | |
| $y = \frac{3}{4}x^2$ | | | | |
| $y = -\frac{1}{3}x^2$ | | | | |
| $y = -\frac{2}{3}x^2$ | | | | |

**2.** $y = \frac{1}{3}x^2$ , $y = -\frac{1}{4}x^2$ என்னும் சார்புகளின் வரைபுகளை வரைவதற்காகக் கீழே அட்டவணைகள் தரப்பட்டுள்ளன.

$y = \frac{1}{3}x^2$

| $x$ | $-6$ | $-3$ | 0 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 12 | ____ | 0 | 3 | ____ |

$y = -\frac{1}{4}x^2$

| $x$ | $-4$ | $-2$ | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-4$ | $-1$ | 0 | ____ | ____ |

(i) அட்டவணைகளைப் பூரணப்படுத்துக.
(ii) பொருத்தமான அளவிடைக்கு வரைபுகளைத் தனித்தனியே வரைக.
(iii) ஒவ்வொரு வரைபினதும்
(*a*) சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு
(*b*) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
(*c*) சார்பின் உயர்வு அல்லது இழிவுப் பெறுமானம் ஆகியவற்றைத் தருக.

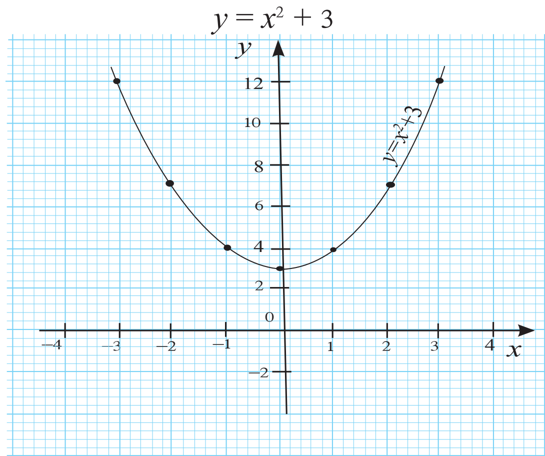
3. (i) $-3 \leq x \leq 3$ ஆகிய பெறுமான ஆயிடையில் $y = 2x^2$, $y = 4x^2$, $y = \frac{-1}{3}x^2$, $y = -3x^2$ என்னும் சமன்பாடுகளின் வரைபுகளை வரைவதற்குப் பொருத்தமான பெறுமான அட்டவணைகளைத் தயாரிக்க.
(ii) பொருத்தமான ஆள்கூற்றுத்தளத்தில் ஒவ்வொரு சமன்பாட்டினதும் வரைபை தனித்தனியே வரைக.
(iii) ஒவ்வொரு வரைபிலிருந்தும்,
(*a*) சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாட்டை எழுதுக.
(*b*) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைத் தருக.
(*c*) உயர்வு அல்லது இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

## 20.5 வடிவம் $y = ax^2 + b$ சார்பின் வரைபு

$y = ax^2 + b$ என்னும் வடிவிலான ஒரு சார்பின் வரைபின் ( இங்கு $a \neq 0$) சில அடிப்படைப் பண்புகளை அறிந்துகொள்வதற்காக $y = x^2 + 3$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவோம்.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| +3 | +3 | +3 | +3 | +3 | +3 | +3 | +3 |
| $y$ | 12 | 7 | 4 | 3 | 4 | 7 | 12 |

$y = x^2 + 3$



$y = x^2 + 3$ என்னும் சார்பின் வரைபு ஓர் இழிவுப் புள்ளியையுடைய ஒரு பரவளைவாகும். $y = x^2 + 3$ என்னும் சார்பின் வரைபின்,

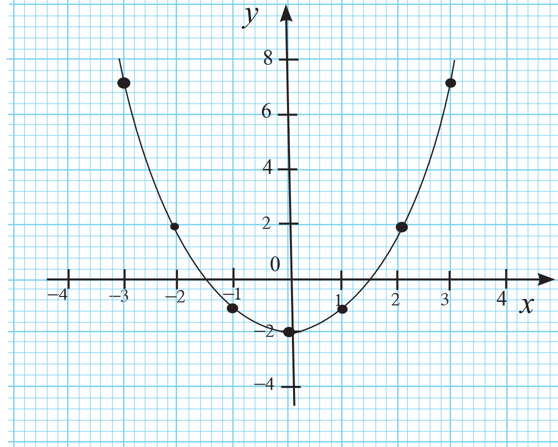
- சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.
- ஓர் இழிவுப் புள்ளி உள்ளதுடன் அதன் ஆள்கூறுகள் (0, 3) ஆகும்.
- சார்பின் மீதுள்ள புள்ளிகளின் $y$ ஆள்கூறுகளின் குறைந்த பெறுமானம் 3 ஆகும். எனவே சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம் 3 ஆகும்.

$y = ax^2 + b$ வடிவிலான ஒரு சார்பின் $b$ இன் பெறுமானம் ஒரு மறை எண்ணாக இருக்கும்போது சார்பின் வரைபின் பெறுமானங்களை அறிந்துகொள்வதற்காக $y = x^2 - 2$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவோம்.

$y = x^2 - 2$

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| –2 | –2 | –2 | –2 | –2 | –2 | –2 | –2 |
| $y$ | 7 | +2 | –1 | –2 | –1 | +2 | 7 |

(–3, 7), (–2, 2), (–1, –1), (0, –2), (1, –1), (2, 2), (3, 7)




$y = x^2 - 2$ சார்பின் வரைபானது ஓர் இழிவுப் புள்ளியினூடான ஒரு பரவளைவாகும்.

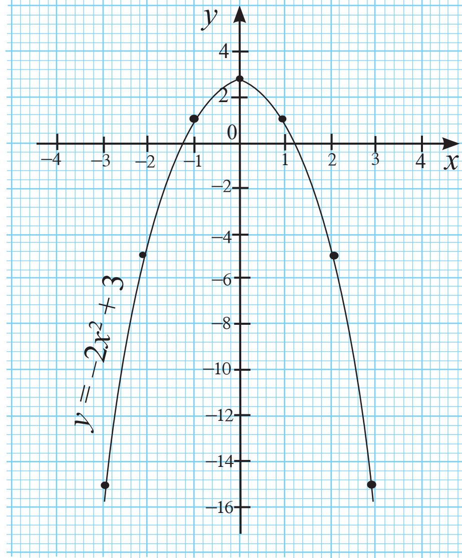
- சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.
- திரும்பற் புள்ளியிள் ஆள்கூறுகள் (0, –2) ஆகும்.
- சார்பின் மீதுள்ள புள்ளிகளின் இழிவுப் பெறுமானம் –2 ஆகும். எனவே சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம் –2 ஆகும்.

$y = ax^2 + b$ வடிவிலான ஒரு சார்பில் $a$ மறைப் பெறுமானமாயிருக்கும்போது சார்பின் வரைபின் பண்புகளை அறிந்து கொள்வதற்காக $y = -2x^2 + 3$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவோம்.

$y = -2x^2 + 3$

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | $9$ | $4$ | $1$ | $0$ | $1$ | $4$ | $9$ |
| $-2x^2$ | $-18$ | $-8$ | $-2$ | $0$ | $-2$ | $-8$ | $-18$ |
| $+3$ | $+3$ | $+3$ | $+3$ | $+3$ | $+3$ | $+3$ | $+3$ |
| $y$ | $-15$ | $-5$ | $+1$ | $+3$ | $+1$ | $-5$ | $-15$ |

$(-3, -15)$ $(-2, -5)$ $(-1, 1)$ $(0, 3)$ $(1, 1)$ $(2, -5)$ $(3, -15)$




சார்பு $y = -2x^2 + 3$ இன் வரைபானது உயர்வுப் புள்ளி ஒன்றுடனான பரவளைவாகும்.

$y = -2x^2 + 3$ என்னும் வரைபில்

- சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.
- திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(0, 3)$ ஆகும்.
- சார்பின் மீதுள்ள புள்ளிகளின் உயர்வுப் பெறுமானம் 3 ஆகும். எனவே சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானம் 3 ஆகும்.

வரையப்பட்ட வரைபுகளில் இருந்து

$y = ax^2 + b$ என்னும் வடிவிலான சார்புகளின் சில பொதுப் பண்புகளை அறிந்து கொள்வோம்.

$y = ax^2 + b$ என்னும் வடிவிலான சார்புகளின் வரைபுகள்

- $a$ நேர்ப் பெறுமானமாக இருக்கும்போது இழிவுப் புள்ளியையுடைய பரவளைவாகும்.
- $a$ மறைப் பெறுமானமாக இருக்கும்போது உயர்வுப் புள்ளியையுடைய பரவளைவாகும்.
- சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.
- திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(0, b)$ ஆகும்.
- உயர்வு அல்லது இழிவுப் பெறுமானம் $b$ ஆகும்.

**உதாரணம் 1**

$y = 3x^2 - 5$ என்னும் சார்பின் வரைபின்

(i) சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு

(ii) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

(iii) $y$ இன் உயர்வு அல்லது இழிவுப் பெறுமானம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $y = ax^2 + b$ என்னும் வடிவிலான சார்புகளின் வரைபு $y$ அச்சைப்பற்றி சமச்சீரான பரவளையி என்பதால் $y = 3x^2 - 5$ என்னும் சார்பின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.

(ii) $y = ax^2 + b$ என்னும் வடிவிலான சார்புகளின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(0, b)$ என்பதால், $y = 3x^2 - 5$ என்னும் வரைபின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(0, -5)$ ஆகும்.

(iii) $y = 3x^2 - 5$ என்னும் சார்பில் $x^2$ இன் குணகம் ஒரு நேர்ப் பெறுமானம் என்பதால் இழிவையுடைய ஒரு வரைபாகும். எனவே $y$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $-5$ ஆகும்.

**உதாரணம் 2**

$y = 4 - 2x^2$ என்னும் சார்பின் வரைபின்

(i) சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு

(ii) திரும்பற் புள்ளியிள் ஆள்கூறுகள்

(iii) $y$ இன் உயர்வு அல்லது இழிவுப் பெறுமானம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $y = 4 - 2x^2$ என்னும் வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.

(ii) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(0, 4)$ ஆகும்.

(iii) $x^2$ இன் குணகம் ஒரு மறைப் பெறுமானம் என்பதால் உயர்வையுடைய ஒரு வரைபாகும். ஆகவே $y$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் 4 ஆகும்.

**பயிற்சி 21.5**

**1.** $y = ax^2 + b$ என்னும் வடிவிலான சார்புகளின் வரைபுகளை வரையாது கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையை நிரப்புக.

| சார்பு | வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு | வரைபின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் | வரைபு உயர்வை/இழிவை உடையது | சார்பின் உயர்வு அல்லது இழிவுப் பெறுமானம் |
|---|---|---|---|---|
| $y = 3x^2 + 4$ | | | | |
| $y = 3 - 4x^2$ | | | | |
| $y = \frac{3}{2}x^2 + 4$ | | | | |
| $y = \frac{3}{2}x^2 - 5$ | | | | |
| $y = 2x^2 - \frac{1}{3}$ | | | | |

**2.** $y = 2x^2 - 4$ , $y = -x^2 + 5$ ஆகிய சார்புகளின் வரைபை வரைவதற்கு பூரணப்படுத்தாத பெறுமான அட்டவணைகள் தரப்பட்டுள்ளன.

$y = 2x^2 + 4$

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | _____ | _____ | –2 | 4 |

$y = -x^2 + 5$

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | –4 | _____ | + 4 | + 5 | _____ | + 1 | –4 |

(i) பெறுமான அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்தி அவற்றிலிருந்து வரைபுகளைத் தனித்தனியே வரைக.

(ii) வரைபிலிருந்து

(*a*) சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு

(*b*) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

(*c*) சார்பின் உயர்வு அல்லது இழிவுப் பெறுமானம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

**3.** கீழே (*a*) இலிருந்து (*d*) வரை தரப்பட்டுள்ள வரைபுகளை வரைவதற்கு $x$ இன் $-3 \leq x \leq 3$ பெறுமான ஆயிடையின் பெறுமானங்களைப் பயன்படுத்தி அட்டவணைகளைத் தயாரிக்குக.

(I) பொருத்தமான அளவிடைக்கு அவ்வரைபுகளைத் தனித்தனியே வரைக.

(II) அவ்வரைபுகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும்

(i) சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(iii) வரைபின் உயர்வு அல்லது இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*a*) $y = x^2 + 4$

(*b*) $y = 4 - x^2$

(*c*) $y = -(2x^2 + 3)$

(*d*) $y = 4x^2 - 5$

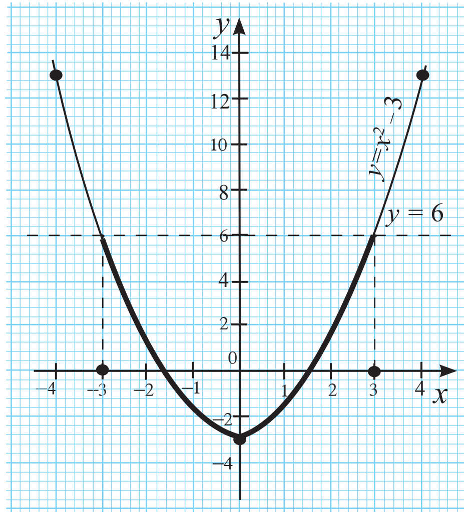
## 21.6 $y = ax^2 + b$ என்னும் வடிவிலான சார்பில் $y$ இன் பெறுமான ஆயிடைக்குரிய $x$ இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காணல்

இழிவுப் பெறுமானமுடைய ஒரு சார்பின் $y$ இன் பெறுமான ஆயிடைக்குரிய $x$ இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காணும் முறையை சார்பு $y = x^2 - 3$ இன் வரைபிலிருந்து அறிந்துகொள்வோம். வரைபில் $y < 6$ இற்குரிய $x$ இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்போம். இதற்கு முதலில் $y = x^2 - 3$ இன் வரைபை வரைவோம்.

$y = x^2 - 3$

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |
| $-3$ | $-3$ | $-3$ | $-3$ | $-3$ | $-3$ | $-3$ | $-3$ | $-3$ | $-3$ |
| $y$ | 13 | 6 | 1 | $-2$ | $-3$ | $-2$ | 1 | 6 | 13 |

$(-4, 13), (-3, 6), (-2, 1), (-1, -2), (0, -3), (1, -2), (2, 1), (3, 6), (4, 13)$




$y < 6$ பகுதியை அறிந்துகொள்வதற்காக கோடு $y = 6$ ஐ வரைவோம். சார்பின் பெறுமானம் 6 இலும் குறைவானதாக அதாவது பெறுமானம் $y < 6$ ஆகும். $x$ இன் ஆயிடையைக் காண்போம்.

வரைபில் கோடு $y = 6$ இற்குக் கீழே உள்ள பகுதியில் $y$ ஆள்கூறுகள் 6 இலும் குறைந்த பெறுமானங்களைக் கொண்டதாகும். வரைபில் அதற்குரிய பகுதி தடிப்பாகக் காட்டப்பட்டுள்ளது. வரைபும் கோடு $y = 6$ உம் வெட்டும் புள்ளிகளிருந்து $x$– அச்சு வரை $y$ அச்சுக்கு சமாந்தரமான இரண்டு கோடுகளை வரைவோம். அக்கோடுகள் $x$– அச்சை சந்திக்கும் புள்ளிகளைக் குறிப்போம்.

$y < 6$ ஆவதற்கு $x$ இன் பெறுமானம் $-3$ இலும் கூடியதாயிருப்பதுடன் $+3$ இலும் குறைவானதாகும். எனவே, சார்பு $y = x^2 - 3$ இல் $y < 6$ ஆகும் $x$ இன் பெறுமான வீச்சு $-3 < x < 3$ ஆகும்.

**உதாரணம்** 1

$y = x^2 - 4$ இன் வரைபிலிருந்து

(i) $y \geq 0$ ஆகும்போது $x$ இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.

(ii) சார்பு நேராக அதிகரிக்கும் $x$ இன் பெறுமான வீச்சு யாது?

(iii) சார்பு நேராகக் குறையும் $x$ இன் பெறுமான வீச்சு யாது?

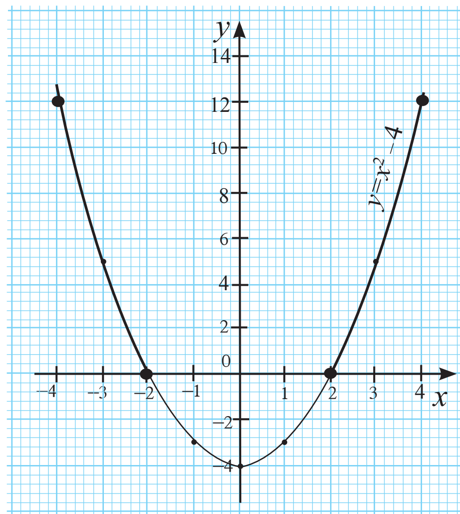
(iv) சார்பு மறையாக அதிகரிக்கும் $x$ இன் பெறுமான வீச்சு யாது?

(v) சார்பு மறையாகக் குறையும் $x$ இன் பெறுமான வீச்சு யாது?

$y = x^2 - 4$

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |
| $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ |
| $y$ | 12 | 5 | 0 | $-3$ | $-4$ | $-3$ | 0 | 5 | 12 |

$(-4, 12), (-3, 5), (-2, 0), (-1, -3), (0, -4), (1, -3), (2, 0), (3, 5), (4, 12)$



(i) $y \geq 0$ இல் $y = 0$ ஆகும்போது சார்பானது $x$– அச்சை $-2$, $2$ இல் சந்திக்கின்றது. ஆகவே $x$ இன் பெறுமானம் $-2$, $2$ ஆகும்.

ஆகவே $x \leqslant -2$ அல்லது $x \geq 2$

(ii) $x > 2$ (iii) $x < -2$ (iv) $0 < x < 2$ (v) $-2 < x < 0$

**பயிற்சி 21.6**

1. $y = 3 - 2x^2$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைக. $y \geq 1$ இற்குரிய $x$ இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.

2. $y = 2x^2 - 4$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைக.
   (i) $y < -3$ ஆகும் $x$ இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.
   (ii) சார்பு மறையாக அதிகரிக்கும் $x$ இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.
   (iii) சார்பு நேராக அதிகரிக்கும் $x$ இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.
   (iv) சார்பு நேராகக் குறையும் $x$ இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.
   (v) சார்பு மறையாகக் குறையும் $x$ இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.

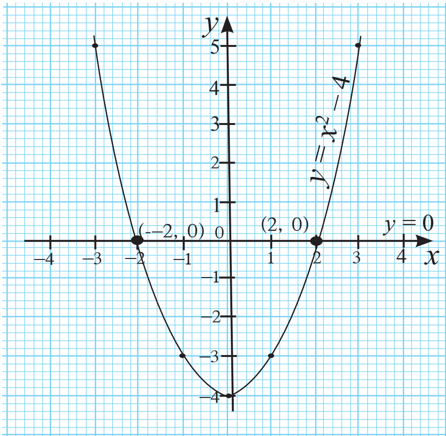
## 21.7 $y = ax^2 + b$ என்னும் வடிவிலான ஒரு சார்பின் வரைபிலிருந்து $ax^2 + b = 0$ என்னும் வடிவிலான ஒரு சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காணல்

உதாரணமாக $x^2 - 4 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களை காணும் முறையைக் காண்போம். இங்கு, முதலில் $y = x^2 - 4$ இன் வரைபை வரைய வேண்டும்.

$y = x^2 - 4$

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ |
| $y$ | 5 | 0 | $-3$ | $-4$ | $-3$ | 0 | 5 |

$(-3, 5)$ $(-2, 0)$ $(-1, -3)$ $(0, -4)$ $(1, -3)$ $(2, 0)$ $(3, 5)$




$y = x^2 - 4$ என்னும் சார்பின் வரைபானது $x$ அச்சை $+2$, $-2$ இல் சந்திக்கின்றது. அதாவது $x = 2$ உம் $x = -2$ உம் ஆகும்போது $y$ ஆள்கூறானது 0 ஆகும். ஆகவே $x = 2$ உம் $x = -2$ உம் ஆகும்போது $x^2 - 4 = 0$ ஆகும். ஆகவே $x^2 - 4 = 0$ இன் மூலங்கள் 2 உம் $-2$ உம் ஆகும்.

**பயிற்சி 21.7**

**1.** சார்பு $y = 9 - 4x^2$ இன் வரைபை வரைவதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள பெறுமான அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $+\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-7$ | $5$ | $8$ | $9$ | | $5$ | $-7$ |

(i) அட்டவணையிலிருந்து சார்பு $y = 9 - 4x^2$ இன் வரைபை வரைக.

(ii) வரைபிலிருந்து சமன்பாடு $9 - 4x^2 = 0$ இன் மூலங்களைக் காண்க.

**2.** $-3 \leq x \leq 3$ என்னும் ஆயிடையில் சார்பு $y = x^2 - 1$ இன் வரைபை வரைவதற்கு ஒரு பெறுமான அட்டவணையைத் தயாரிக்க.

(i) சார்பு $y = x^2 - 1$ இன் வரைபை வரைக.

(ii) வரைபிலிருந்து சமன்பாடு $x^2 - 1 = 0$ இன் மூலங்களைக் காண்க.

**3.** $-3 \leq x \leq 3$ என்னும் ஆயிடையில் சார்பு $y = 4 - x^2$ இன் வரைபை வரைவதற்கு ஒரு பெறுமான அட்டவணையைத் தயாரிக்க.

(i) $y = 4 - x^2$ இன் வரைபை வரைக.

(ii) வரைபிலிருந்து சமன்பாடு $4 - x^2 = 0$ இன் மூலங்களைக் காண்க.

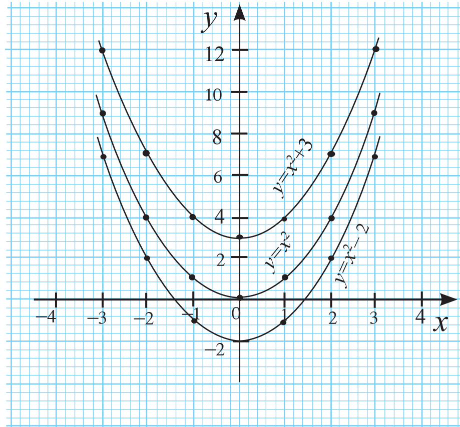
**4.** $-3 \leq x \leq 3$ என்னும் ஆயிடையில் சார்பு $y = x^2 - 9$ இன் வரைபை வரைவதற்கு ஒரு பெறுமான அட்டவணையைத் தயாரிக்க.

(i) $y = x^2 - 9$ இன் வரைபை வரைக.

(ii) வரைபிலிருந்து சமன்பாடு $x^2 - 9 = 0$ இன் மூலங்களைக் காண்க.

## 21.8 $y = ax^2 + b$ வடிவிலான வரைபொன்றின் சமன்பாட்டிலிருந்து இன்னொரு வரைபின் சமன்பாட்டைக் காணல்

நீங்கள் முன்னர் கற்ற கீழே தரப்பட்டுள்ள வரைபுகள் பற்றி மீண்டும் கவனம் செலுத்துங்கள்.



இவ்வரைபுகளில் இருந்து $y = x^2$ என்னும் சார்பின் வரைபை $y$ அச்சு வழியே நிலைக்குத்தாக 3 அலகு மேல்நோக்கி நகர்த்துவதன் மூலம் $y = x^2 + 3$ இன் வரைபைப் பெறலாம். அதேபோல் $y = x^2$ இன் வரைபை $y$ அச்சு வழியே நிலைக்குத்தாக 2 அலகுகள் கீழ் நோக்கி நகர்த்துவதன் மூலம் $y = x^2 - 2$ இன் வரைபைப் பெறலாம் என்பதையும் அவதானிக்கலாம்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையை அவதானிக்கவும்.

| வரைபின் சமன்பாடு | இழிவுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் | சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு |
|---|---|---|
| $y = x^2$ | (0, 0) | $x = 0$ |
| $y = x^2 + 3$ | (0, 3) | $x = 0$ |
| $y = x^2 - 2$ | (0, –2) | $x = 0$ |

அட்டவணையிலிருந்து

- $y = x^2$ இன் வரைபை $y$ அச்சு வழியே நிலைக்குத்தாக 6 அலகுகள் மேல்நோக்கி நகர்த்துவதன் மூலம் பெறப்படும் வரைபின் சமன்பாடு $y = x^2 + 6$ ஆகும்.

- $y = x^2$ இன் வரைபை $y$ அச்சு வழியே நிலைக்குத்தாக 4 அலகுகள் கீழ்நோக்கி நகர்த்துவதன் மூலம் பெறப்படும் வரைபின் சமன்பாடு $y = x^2 - 4$ ஆகும்.

- பொதுவாக $y = ax^2 + b$ என்னும் வடிவில் உள்ள சார்புகளின் வரைபை $y$ அச்சு வழியே நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கியோ அல்லது கீழ்நோக்கியோ $c$ அலகுகள் நகர்த்துவதன் மூலம் பெறப்படும் சார்பின் சமன்பாடு முறையே $y = ax^2 + b + c$ யும் $y = ax^2 + b - c$ யும் ஆகும்.

**பயிற்சி 21.8**

**1.** ஒரு வரைபின் சார்பு $y = x^2 + 2$ ஆகும். இவ்வரைபானது $y$ அச்சு வழியே நிலைக்குத்தாக
   (i) மேல்நோக்கி 2 அலகுகளும்
   (ii) கீழ்நோக்கி 2 அலகுகளும்
   நகர்த்தப்படும்போது பெறப்படும் வரைபுகளின் சமன்பாடுகளைத் தருக.

**2.** ஒரு வரைபின் சார்பு $y = -x^2$ ஆகும். இவ்வரைபானது $y$ அச்சு வழியே நிலைக்குத்தாக
   (i) மேல்நோக்கி 3 அலகுகளும்
   (ii) கீழ்நோக்கி 5 அலகுகளும்
   நகர்த்தப்படும்போது பெறப்படும் வரைபுகளின் சமன்பாடுகளைத் தருக.

**3.** ஒரு வரைபின் சார்பு $y = 2x^2 + 5$ ஆகும். இவ்வரைபானது $y$ அச்சுவழியே நிலைக்குத்தாக
(i) மேல்நோக்கி 6 அலகுகளும்
(ii) கீழ்நோக்கி 4 அலகுகளும்
நகர்த்தப்படும்போது பெறப்படும் வரைபுகளின் சமன்பாடுகளைத் தருக.

**பலவினப் பயிற்சி**

**1.** ஒரு நேர்கோட்டு வரைபின் மீதுள்ள இரண்டு புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் (0, 3) (3, 1) ஆகும்.
(i) வரைபின் படிதிறனைக் காண்க.
(ii) வரைபின் வெட்டுத்துண்டைக் காண்க.
(iii) வரைபின் சார்பை எழுதுக.

**2.** (–1, –3) (2, 4) (4, 6) ஆகியன ஒரே நேர்கோட்டு வரைபின் மீதுள்ள புள்ளிகள் என வரைபை வரையாது பரீட்சித்துக் காட்டுக. உமது விடைக்கான காரணத்தைத் தருக.

**3.** வரைபை வரையாது (–2, –8) (0, –2) (3, 7) (2, 4) ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர் கோட்டு வரைபின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள் எனக் காரணங்களுடன் தருக.

**4.** $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ இன் வரைபை வரைந்து, வரைபிலிருந்து
(i) $y \geq 1\frac{1}{2}$ ஆகும் $x$ இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.
(ii) சார்பின் பெறுமானம் –1 இலும் குறைவாகும் $x$ இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.

**5.** $y = 3 - 2x^2$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்கு $-2 \leq x \leq 2$ என்ற பெறுமான ஆயிடையில் ஓர் அட்டவணையைத் தயாரிக்க.
(i) அட்டவணையிலிருந்து $y = 3 - 2x^2$ இன் வரைபை வரைக.
(ii) அவ்வரைபில் இருந்து $3 - 2x^2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.
(iii) இவ்வரைபை $y$ அச்சின்வழியே நிலைக்குத்தாக 2 அலகுகள் மேல்நோக்கி நகர்த்துவதன்மூலம் பெறப்படும் வரைபின் சமன்பாட்டைத் தருக.

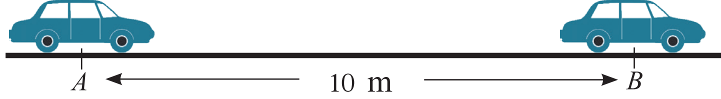
# 22 வீதம்

**இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,**

- தூரம், நேரம், கதி ஆகியவற்றுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை எழுதுவதற்கும்
- தூரமும் நேரமும் இடம்பெறும் தகவல்களை ஒரு வரைபில் வகைகுறிப்பதற்கும்
- திரவத்தின் கனவளவு, நேரம், வீதம் ஆகியவற்றுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

## 22.1 கதி




மின் வலுவினால் தொழிற்படுத்தப்படும் ஒரு பொம்மை மோட்டார் கார் ஒரு புள்ளி $A$ யிலிருந்து 10 m தூரத்தில் உள்ள புள்ளி $B$ இற்குச் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் 5 செக்கன்களெனக் கொள்வோம்.

அப்போது மோட்டார் கார் 5 செக்கன்களில் செல்லும் தூரம் 10 m ஆகும். மோட்டார் காரின் தொடக்கக் கதியிலிருந்து ஒவ்வொரு செக்கனிலும் முன்னோக்கிச் செல்லும் தூரங்கள் சமமெனின், அது ஒவ்வொரு செக்கன்களிலும் முன்னோக்கி செல்லும் தூரம் $\frac{10}{5}$ அல்லது 2 மீற்றர்களாகும். அதற்கேற்ப மோட்டார் கார் $A$ யிலிருந்து முன்னோக்கிச் செல்லும் தூரம் மாறும் வீதம் 2 மீற்றர்/செக்கன் ஆகும். அப்பெறுமானம் $A$ யிலிருந்து $B$ யிற்கு மோட்டார் கார் இயங்கிய கதியாகும்.

இதற்கேற்ப இயங்கும் ஒரு குறித்த பொருள் யாதாயினும் ஓரலகு நேரத்தில் செல்லும் தூரம் ஒரு மாறாப் பெறுமானமாக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில் அப்பொருள் சீரான கதியில் இயங்குவதாகக் கூறப்படும். மேலும் அவ்வாறு செல்லும் தூர அளவானது **கதி** எனப்படும். இப்பாடத்தில் இனிமேல் சீரான கதியில் இயங்கும் பொருள்கள் பற்றி மாத்திரம் கருதப்படும்.

எனினும் வீதியில் செல்லும் ஒரு வாகனம் வீதியில் உள்ள நெரிசல்களின் விளைவாகவும் வேறு காரணங்களின் விளைவாகவும் சென்ற முழுப் பயணத்திலும் ஒரே கதியைச் சார்ந்திருக்க முடியாது. ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் ஒரு வாகனம் செல்லும் கதியை அறிவதற்கு வாகனத்தில் பொருத்தப்பட்டிருக்கும் கதிமானி என்னும் உபகரணம் பயன்படுத்தப்படும்.




உருவில் காணப்படும் கதிமானியினால் வகைகுறிக்கப்படும் கதியை 80 kmph எனக் காட்டலாம். அது 80 km /h என அல்லது 80 $\text{kmh}^{-1}$ என எழுதப்படும்.

அவ்வாறே நீங்கள் வீதியில் செல்லும்போது கதிக் கட்டுப்பாட்டை வகைகுறிப்பதற்கு 40 kmph , 60 kmph எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ள கதிச் சைகைப் பலகைகளைக் கண்டிருப்பீர்கள். மேலும் லொறி போன்ற கனரக வாகனங்களின் பிற்பக்கத்திலே 40 kmph எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் சந்தர்ப்பங்களை நினைவுகூர்க.




சீரான கதியில் இயங்கும் ஒரு பொருளுக்கு அப்பொருள் செல்லும் தூரம், அதற்கு எடுக்கும் நேரம், அவ்வாறு செல்லுகையில் பொருளின் கதி என்னும் மூன்று கணியங்களுக்குமிடையே உள்ள தொடர்பைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\text{கதி} = \frac{\text{சென்ற தூரம்}}{\text{எடுத்த நேரம்}}$$

அத்தொடர்பை பின்வருமாறும் எளிய வடிவத்தில் (பின்னங்களின்றி) காட்டலாம்.

$$\text{தூரம்} = \text{கதி} \times \text{நேரம்}$$

**உதாரணம்** 1

ஒரே கதியில் காற்றில் செல்லும் பறவையொன்று 20 செக்கன்களில் 100 m தூரம் செல்லுமெனின், அது செல்லும் கதியைக் காண்க.

$$\text{அது செல்லும் கதி} = \frac{\text{செல்லும் தூரம்}}{\text{எடுக்கும் நேரம்}}$$

$$= \frac{100\text{ m}}{20\text{ s}}$$

$$= 5\text{ ms}^{-1}$$

**உதாரணம் 2**

5 $ms^{-1}$ என்னும் மறாக் கதியில் செல்லும் பறவை ஒன்று ஒரு நிமிடத்தில் பறக்கும் தூரத்தைக் காண்க.

பறந்து செல்லலும் தூரம் = கதி × நேரம்

$= 5\ ms^{-1} \times 60\ s$

$= 300\ m$

**உதாரணம் 3**

60 $kmh^{-1}$ என்னும் சீரான கதியிலே ஓர் அதிவேக பாதையில் செல்லும் ஒரு மோட்டார் கார் 150 km தூரம் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் கணிக்க.

எடுக்கும் நேரம் $= \frac{\text{தூரம்}}{\text{கதி}}$

$= \frac{150\ km}{60\ kmh^{-1}}$

$= 2\frac{1}{2}h$

**உதாரணம் 4**

வீதியில் செல்லும் ஒரு மோட்டார் சைக்களின் கதிமானியில் 36 $kmh^{-1}$ என மாறால் குறிப்பிடும்போது அம்மோட்டார் சைக்கிள் 5 செக்கன்களில் செல்லும் தூரம் யாது?

இங்கு கதி கிலோமீற்றர்/மணித்தியாலம் என்பதில் தரப்பட்டுள்ளது. அதாவது அதனை மீற்றர்/செக்கன் என்பதற்கு மாற்றுவோம்.

கதி 36 $kmh^{-1}$ ஆகையால்

1 மணித்தியாலத்தில் செல்லும் தூரம் = 36 km

$= 36 \times 1000\ m$

ஆனால் 1 மணித்தியாலம் $= 60 \times 60$ செக்கன்கள்

$\therefore$ $60 \times 60$ செக்கன்களில் செல்லும் தூரம் $= 36 \times 1000\ m$

ஒரு செக்கனில் செல்லும் தூரம் $= \frac{36 \times 1000}{60 \times 60}\ m$

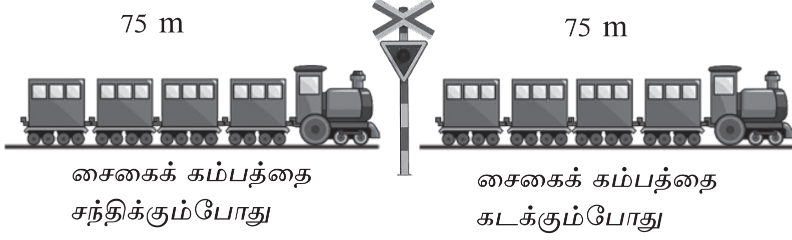
$\therefore$ மோட்டார் சைக்கிள் 1 செக்கனில் செல்லும் தூரம் $= 10\ m$

$\therefore$ 5 செக்கன்களில் செல்லும் தூரம் $= 10 \times 5$

$= 50\ m$

**உதாரணம் 5**

ஒரு மணித்தியாலத்திற்கு 60 கிலோமீற்றர் வேகத்தில் செல்லும் 75 மீற்றர் நீளமான புகையிரதம் சைகைக் கம்பம் ஒன்றைக் கடந்து செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் யாது?




சைகைக் கம்பத்தை கடக்கும்போது புகையிரதம் செல்லும் தூரம் = 75 m
புகையிரதம் ஒரு செக்கனில் செல்லும் தூரத்தைக் காண்பதற்கு கதியை மீற்றர்/செக்கன் அல்லது $ms^{-1}$ என்பதில் காண்போம்.

ஒரு மணித்தியாலத்தில் செல்லும் தூரம் $= 60\text{ km}$

$= 60 \times 1000\text{ m}$

ஒரு செக்கனில் செல்லும் தூரம் $= \dfrac{60 \times 1000}{60 \times 60}\text{ m}$

$= \dfrac{50}{3}\text{ m}$

$\therefore$ புகையிரதத்தின் கதி $= \dfrac{50}{3}\text{ ms}^{-1}$

காலம் $= \dfrac{\text{தூரம்}}{\text{கதி}}$ ஆகையால்,

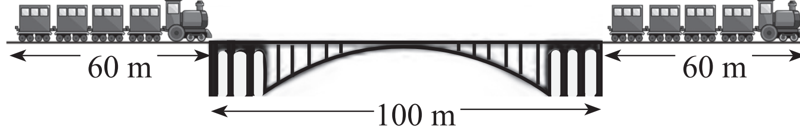
புகையிரதம் சைகைத் தூணைக் கடப்பதற்கு எடுக்கும் நேரம் $= 75 \div \dfrac{50}{3}$

$= 75 \times \dfrac{3}{50}$

$=$ 4.5 செக்கன்கள்

**உதாரணம் 6**

72 kmh$^{-1}$ என்னும் கதியில் செல்லும் 60 m நீளமுள்ள ஒரு புகையிரதம் 100 m நீளமுள்ள ஒரு பாலத்தைக் கடந்து செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.




இங்கு புகையிரதம் 160 m தூரம் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காணுதல் வேண்டும். அதற்காக முதலில் கதியை மீற்றர்/செக்கன் இல் காண்போம்.

$$72 \text{ kmh}^{-1} = \frac{72 \times 1000}{60 \times 60} \text{ ms}^{-1}$$

$$= 20 \text{ ms}^{-1}$$

பாலத்தைக் கடந்து செல்லும்போது

மொத்தத் தூரம் $= 100 \; + 60$ m

$= 160$ m

புகையிரதம் ஒரு செக்கனில் செல்லும் தூரம் $= 20$ m

அதாவது 20 m செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் $= 1$ செக்கன்

$\therefore$ 160 m செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் $= \frac{1}{20} \times 160$

$= 8$ செக்கன்கள்

## சராசரிக் கதி

பொதுவாக வீதியில் செல்லும் வாகனங்கள் ஒரே கதியைப் பேண முடியாது. அத் தகைய சந்தர்ப்பங்களில் சராசரிக் கதி பற்றிய எண்ணக்கரு முக்கியமானதாகும். ஒரு குறித்த பொருள் செல்லும் மொத்தத் தூரம் அதற்கு எடுக்கும் மொத்த நேரத்தினால் வகுக்கப்படும்போது கிடைக்கும் பெறுமானம் சராசரிக் கதி எனப்படும்.

**உதாரணம் 7**

நகரங்களுக்கிடையே செல்லும் பேருந்து ஒன்று முதல் 25 km தூரத்தைச் செல்வதற்கு $\frac{1}{2}$ மணித்தியாலமும் அடுத்த 80 km தூரத்தைச் செல்வதற்கு 1 மணித்தியாலமும் எடுக்குமெனின், பேருந்தின் சராசரிக் கதியைக் காண்க.

பேருந்து செல்லும் மொத்தத் தூரம் $= 25 + 80\text{ km}$

$= 105\text{ km}$

செல்வதற்கு எடுத்த மொத்த நேரம் $= \frac{1}{2} + 1\text{ h}$

$= 1\frac{1}{2}\text{ h}$

பேருந்து செல்லும் சராசரிக் கதி $= 105\text{ km} \div 1\frac{1}{2}\text{ h}$

$= 105 \times \frac{2}{3}$

$= 70\text{ kmh}^{-1}$

**பயிற்சி 22.1**

**1.** சீரான கதியில் பறக்கும் ஓர் ஆகாய விமானம் 4 மணித்தியாலங்களில் 1 200 km தூரம் செல்லுமெனின், ஆகாய விமானத்தின் கதியைக் கணிக்க.

**2.** சீரான கதியில் ஓடும் ஒரு சிறுவன் 200 m ஓடுவதற்கு 40 செக்கன்கள் எடுப்பானெனின், சிறுவனின் கதியை கிலோமீற்றர்/மணித்தியாலத்தில் காண்க.

**3.** சீரான கதியில் செல்லும் ஒரு மின் புகையிரதம் ஒரு நாளில் 300 km செல்வதற்கு 6 மணித்தியாலங்கள் எடுக்கின்றது. மேலும் ஒரு நாளில் அப்புகையிரதம் அத்தூரத்தைச் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் 8 மணித்தியாலங்கள் ஆகும். இரு நாட்களிலும் புகையிரதம் செல்லும் கதிகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்தைக் காண்க.

**4.** 300 $\text{kmh}^{-1}$ என்னும் சீரான கதியில் செல்லும் செய்மதி ஒன்று 4 500 km செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் யாது?

**5.** 48 $\text{kmh}^{-1}$ என்னும் சீரான கதியில் செல்லும் மோட்டார் கார் ஒன்று 30 செக்கன்களில் செல்லும் தூரத்தைக் காண்க.

**6.** பேருந்து ஒன்று 40 $\text{kmh}^{-1}$ கதியில் 15 நிமிடங்களுக்குச் சென்று அதன் பின்னர் 70 $\text{kmh}^{-1}$ கதியில் 30 நிமிடங்களுக்குச் செல்கிறது. பேருந்தின் சராசரிக் கதியைக் காண்க.

**7.** 54 $\text{kmh}^{-1}$ என்னும் சீரான கதியில் செலுத்தப்படும் புகையிரதம் ஒன்று ஒரு சைகைத் தூணைக் கடப்பதற்கு 10 செக்கன்கள் எடுக்கின்றதாயின், புகையிரதத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

**8.** 72 $kmh^{-1}$ என்னும் சீரான கதியில் செல்லும் 60 m நீளமுள்ள புகையிரதம் ஒன்று 80 m நீளமுள்ள ஒரு புகையிரத மேடையைக் கடந்து செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

**9.** நகரம் *A* இலிருந்து 0800h இற்குப் புறப்படும் புகையிரதம் ஒன்று 60 $kmh^{-1}$ என்னும் சீரான கதியில் நகரம் *B* யை நோக்கிச் செல்லும் அதே வேளை *B* யிலிருந்து புறப்படும் ஒரு புகையிரதம் 40 $kmh^{-1}$ என்னும் சீரான கதியில் *A* யை நோக்கிச் செல்கின்றது. *A* , *B* ஆகிய நகரங்களுக்குமிடையே உள்ள தூரம் 100 km எனின், இரு புகையிரதங்களும் சந்திக்கும் நேரத்தைக் கணிக்க.

**10.** இரு நகரங்கலிருந்து ஒரே நேரத்தில் ஒருவரை ஒருவர் நோக்கிப் புறப்படும் மோட்டார் சைக்கிளோட்டிகள் இருவர் முறையே 40$kmh^{-1}$, 50 $kmh^{-1}$ கதிகளில் சீராகச் செல்கின்றனர். இருவரும் பயணத்தை ஆரம்பித்து $\frac{1}{2}$ மணித்தியாலத்திற்குப் பின்னர் சந்தித்தால், இரு நகரங்களுக்குமிடையே உள்ள தூரத்தைக் கணிக்க.

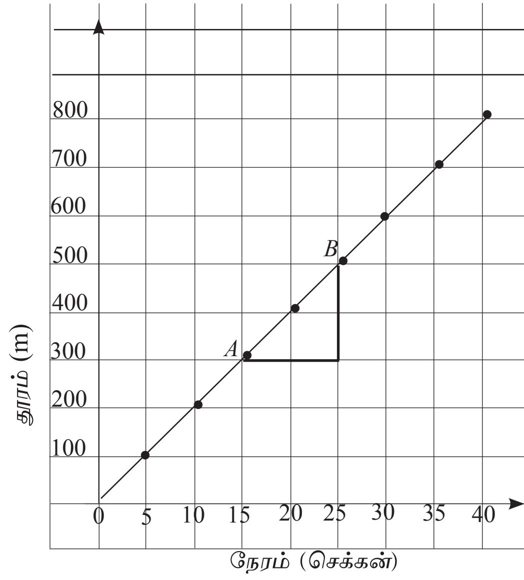
## 22.2 தூர-நேர வரைபு

ஓர் இயங்கும் பொருளின் நேரத்திற்கு ஏற்ப தூரம் மாறுவதை வகைகுறிப்பதற்கு வரைபைப் பயன்படுத்தலாம். அதில் பொருள் இயங்கும் நேரம் *x*- அச்சு வழியேயும் தூரம் *y*- அச்சு வழியேயும் வகைகுறிக்கப்படும். அவ்வாறு வரையப்படும் வரைபு **தூர-நேர வரைபு** எனப்படும்.

சீரான கதியில் செல்லும் செய்மதி ஒன்றின் இயக்கத்தை அவதானித்துப் பெற்ற தகவல்களுக்கேற்பத் தயாரிக்கப்பட்ட ஓர் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ஆரம்பத்திலிருந்து எடுத்த நேரம் (செக்கன்) | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
| ஆரம்பித்த இடத்திலிருந்து சென்ற மொத்தத் தூரம் (மீற்றர்) | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 |

அத்தகவல்களைக் கொண்டு வரைந்த ஒரு தூர-நேர வரைபு கீழே காணப்படுகின்றது.




செய்மதி சென்ற மொத்தத் தூரத்தை எடுத்த நேரத்தினால் வகுத்துச் செய்மதி சென்ற கதியைக் கணிக்கலாம்.

$$\text{செய்மதி இயங்கிய கதி} = \frac{800\text{ m}}{40\text{ s}}$$

$$= 20\text{ ms}^{-1}$$

கோடு $AB$ யின் படிதிறன் $= \dfrac{500-300}{25-15} = \dfrac{200}{10} = 20$

அதற்கேற்ப வரைபின் படிதிறனும் செய்மதி இயங்கிய கதியும் சமமென நீர் அவதானிக்கலாம். இதற்கேற்ப, சீரான கதியில் இயங்கும் பொருளுக்குத் தூர - நேர வரைபாக ஒரு நேர்கோடு கிடைக்கும் அதே வேளை அந்நேர்கோட்டின் படிதிறனிலிருந்து கதி கிடைகின்றது.

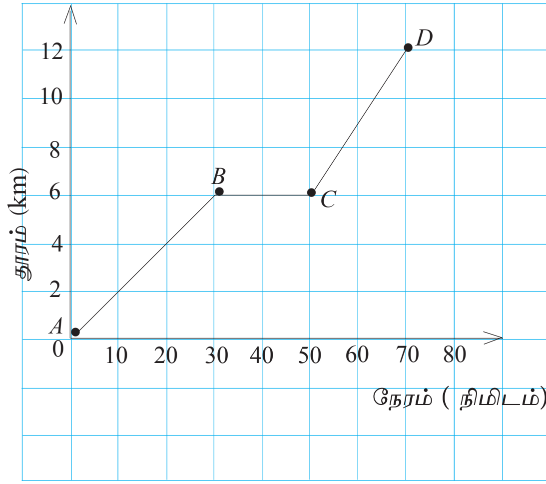
| தூர -நேர வரைபின் படித்திறன் = இயங்கும் பொருளின் கதி |
|---|

**உதாரணம்** 1

நிமலன் தனது சைக்கிளைச் செலுத்திக்கொண்டு ஒரு நண்பனின் வீட்டுக்குச் சென்று அங்கு சிறிது நேரம் தங்கிவிட்டுத் தனது வீட்டுக்குத் திரும்பி வருவதைக் காட்டுவதற்கு வரையப்பட்ட தூர-நேர வரைபு கீழே காணப்படுகின்றது. அதனைக்கொண்டு

(i) நிமலன் நண்பனின் வீட்டுக்குச் சென்ற கதி,

(ii) நண்பனின் வீட்டிலிருந்து திரும்பி வரும் கதி ஆகியவற்றைக் காண்க.




மேற்குறித்த வரைபிற்கேற்ப

நிமலன் வீட்டிலிருந்து நண்பனின் வீட்டிற்கு உள்ள தூரம் = 6 km

நிமலன் அத்தூரத்தைச் செல்வதற்கு எடுத்த நேரம் = 30 நிமிடங்கள்

$= \frac{1}{2}$ h

நிமலன் நண்பனின் வீட்டை நோக்கிச் சைக்கிளிற் சென்ற கதி $= \frac{6 \text{ km}}{\frac{1}{2} \text{ h}}$

$= 12 \text{ kmh}^{-1}$

நிமலன் தனது நண்பனின் வீட்டில் இருக்கும்போது தூரத்தில் மாற்றம் ஏற்படவில்லை.

நிமலன் நண்பனின் வீட்டில் தங்கியிருந்த நேரம் = 20 நிமிடங்கள்

நிமலன் நண்பனின் வீட்டிலிருந்து திரும்பி வருவதற்கு எடுத்த நேரம் = 20 நிமிடங்கள்

$= \frac{1}{3}$ h

∴ நிமலன் திரும்பி வந்த கதி $= \frac{6 \text{ km}}{\frac{1}{3} \text{ h}}$

$= 18 \text{ kmh}^{-1}$

**பயிற்சி 22.2**

**1.** ஓர் அதிவேக பாதையிலே சீரான கதியில் செல்லும் மோட்டார் வாகனம் ஒன்று செல்லும் தூரமும் அதற்கு எடுத்த நேரமும் பின்வரும் அட்டவணையில் காணப்படுகின்றன.

| நேரம் (மணித்தியாலம்) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| தூரம் (கிலோமீற்றர்) | 0 | 60 | 120 | 180 | 240 | 300 | 360 |

(i) மேற்குறித்த தகவல்களைக் கொண்டு ஒரு தூர-நேர வரைபை வரைக.
(ii) வரைபின் படிதிறனைக் காண்க.
(iii) அதிலிருந்து மோட்டார் வாகனம் செல்லும் கதியைக் காண்க.

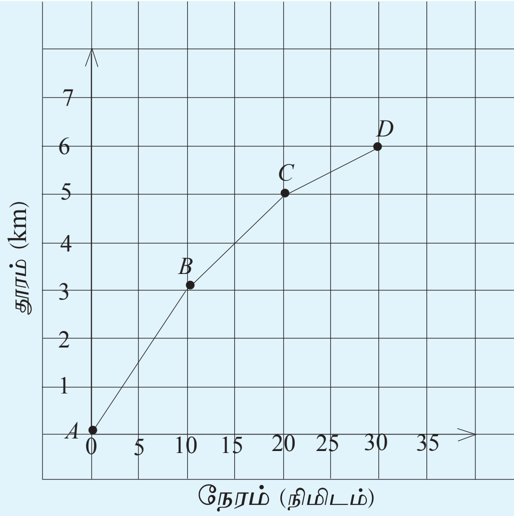
**2.** ஓர் இயங்கும் பொருளின் தூர-நேர மாற்றம் பின்வரும் அட்டவணையில் காணப்படுகின்றது.

| நேரம் (s) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| தூரம் (m) | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 |

(i) மேலே அட்டவணையிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப தூர-நேர வரைபை வரைக
(ii) வரைபின் படிதிறனைக் காண்க.
(iii) இதிலிருந்து மோட்டார் வாகனத்தின் கதியைக் காண்க.

**3.** பயணிகள் போக்குவரத்து பேருந்து ஒன்று பயணத்தின் தொடக்கதிலிருந்து சீரான கதியில் 2 மணித்தியாலங்களில் 60 km தூரத்தில் செல்கின்றது. அதன் பின்னர் 2 மணித்தியாலங்களில் 40 km தூரம் சென்று பயண முடிவிடத்திற்கு வருகின்றது. பேருந்தின் பயணத்திற்கான தூர-நேர வரைபை வரைக.

**4.** ஒருவர் தனது வீட்டிலிருந்து நகரத்திற்கு மோட்டார் சைக்கிளில் சென்றார். அவருடைய இயக்கத்தை வகைகுறிப்பதற்கு வரைந்த ஒரு தூர-நேர வரைபு கீழே காணப்படுகின்றது.




(i) அவரது வீட்டிலிருந்து நகரத்திற்கு உள்ள தூரம் யாது?

(ii) நகரத்திற்குச் செல்வதற்கு அவர் எடுத்த நேரம் யாது?

(iii) அவர் சென்ற சராசரிக் கதியைக் காண்க.

(iv) அவருடைய பயணப் பாதையின் $AB$, $BC$, $CD$ என்னும் பகுதிகளில் சென்ற கதியை வேவ்வேறாகக் கணிக்க.

## 23.3 கனவளவும் நேரமும்

மேலே நாம் ஓரலகு நேரத்தில் செல்லும் தூரமாகக் கதியை வரையறுக்கின்றோம். அதாவது, நேரம் தொடர்பாக தூரத்தின் மாற்ற வீதமாகும். இவ்வீதம் பற்றிய கருத்துக்களைத் தினசரி வாழ்வில் எதிர்ப்படும் வேறு செயன்முறைகளை விவரிப்பதற்கும் பயன்படுத்தலாம். ஓர் உதாரணமாக ஒரு திருகுபிடியிலிருந்து நீர் பாய்ந்துவரும் சந்தர்ப்பத்தைக் கருதுவோம். அத்திருகுபிடியிலிருந்து எந்தவொரு செக்கன் நேர ஆயிடையிலும் பாய்ந்துவரும் நீரின் அளவைச் சேகரித்து அந்நீரின் கனவளவை அளந்து பார்க்கும்போது கிடைக்கும் பெறுமானம் மாறாப் பெறுமானமெனின், அப்போது அத்திருகுபிடியிலிருந்து நீர் சீரான கதியில் பாய்ந்து வருவதாகக் கூறப்படும். மேலும் இங்கு கிடைக்கும் மாறாப் பெறுமானம் திரிகுபிடியிலிருந்து நீர் பாய்ந்துவரும் வீதம் எனப்படும்.

நேரம் செக்கனிலும் நீரின் கனவளவு லீற்றரிலும் அளக்கப்படும்போது வீதத்தின் அலகு லீற்றர்/செக்கன் ($ls^{-1}$) ஆகும்.

1000 l கொள்ளளவு உள்ள ஒரு தொட்டியைச் சீராக நீர் பாய்ந்து வரும் ஒரு குழாயின் மூலம் முற்றாக நிரப்புவதற்கு 20 நிமிடங்கள் எடுக்கின்றதெனக் கொள்வோம்.

அப்போது 20 நிமிடங்களில் பாய்ந்த நீரின் அளவு $= 1000\,l$

$\therefore$ 1 நிமிடத்தில் பாய்ந்த நீரின் அளவு $= \dfrac{1000\,l}{20}$

$= 50\,l$

அதற்கேற்ப ஒரு நேர அலகில், அல்லது ஒரு நிமிடத்தில் குழாயிலிருந்து பாய்ந்து வந்த நீரின் அளவு 50 l ஆகும். ஆகவே குழாயிலிருந்து நீர் பாய்ந்துவரும் வீதம் 50 லீற்றர்/நிமிடம் ($50\, l\, min^{-1}$) என எடுத்துரைக்கலாம்.

$$\text{வீதம்} = \frac{\text{கனவளவு}}{\text{நேரம்}}$$

இதனை பின்வருமாறு விவரிக்கலாம்

| கனவளவு = வீதம் × நேரம் |
|---|

**உதாரணம் 1**

எரிபொருள் நிரப்பும் நிலையமொன்றில் உள்ள எரிபொருள் வழங்கும் குழாயிலிருந்து ஒரு மோட்டார் காருக்கு 30 லீற்றர் எரிபொருளை நிரப்புவதற்கு 60 செக்கன்கள் எடுத்ததெனின், குழாயிலிருந்து எரிபொருள் பாய்ந்து வந்த வீதத்தைக் காண்க.

$$\text{எரிபொருள் பாய்ந்த வீதம்} = \frac{\text{எரிபொருளின் அளவு}}{\text{எடுத்த நேரம்}}$$

$$= \frac{30\, l}{60\, s}$$

$$= \frac{1}{2}\, l s^{-1}$$

**உதாரணம் 2**

கனவுரு வடிவமுள்ள ஒரு வீட்டு நீர்த் தாங்கியின் நீளம் 2 m உம் அகலம் $1\frac{1}{2}$ m உம் உயரம் 1 m உம் ஆகும். தாங்கியில் முற்றாக நீர் நிரம்பியிருக்கும்போது ஒரு குழாயின் மூலம் அதனை முற்றாக வெளியேற்றுவதற்கு எடுத்த நேரம் 50 நிமிடங்களெனின், குழாயிலிருந்து நீர் வெளியேறிய வீதத்தைக் காண்க. (குழாயினூடாக நீர் சீராகப் பாய்ந்து வருகின்றதெனக் கொள்க.)

$$\text{தாங்கியின் கனவளவு} = 2\, m \times 1\frac{1}{2}\, m \times 1\, m$$

$$= 2 \times \frac{3}{2} \times 1\, m^3$$

$$= 3\, m^3$$

$1\, m^3 = 1000\, l$ ஆகையால்,

$$\text{தாங்கியில் உள்ள நீரின் அளவு} = 3 \times 1000\, l$$

$$= 3000\, l$$

$$\text{குழாயிலிருந்து நீர் வெளியேறிய வீதம்} = \frac{\text{தாங்கியின் கனவளவு}}{\text{எடுத்த நேரம்}}$$

$$= \frac{3\,000 \text{ லீற்றர்}}{50 \text{ நிமிடங்கள்}}$$

$$= 60 \text{ லீற்றர் / நிமிடம்}$$

**உதாரணம்** 3

ஒரு நோயாளிக்கு 0.2 $mls^{-1}$ வீதத்திலே உடலினுள்ளே சேலைன் செலுத்தப்பட்டுள்ளது. 450 ml சேலைனைச் செலுத்துவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

$$\text{வீதம்} = \frac{\text{கனவளவு}}{\text{நேரம்}}$$

$$\text{எடுத்த நேரம்} = \frac{\text{சேலைனின் கனவளவு}}{\text{வழங்கும் வீதம்}}$$

$$= \frac{450 \text{ ml}}{0.2 \text{ mls}^{-1}}$$

$$= 2250 \text{ செக்கன்கள்}$$

$$= \frac{2250}{60} \text{ நிமிடங்கள்}$$

$$= 37\frac{1}{2} \text{ நிமிடங்கள்}$$

**பயிற்சி** 22.3

**1.** ஒரு வீட்டுத் திட்டத்திற்கு நீரை வழங்குவதற்கு அமைக்கப்பட்டுள்ள கனவுரு வடிவ நீர்த் தொட்டி ஒன்றின் நீளம் 3 m உம் அகலம் 2 m உம் உயரம் 1.5 m உம் ஆகும்.
   (i) தொட்டியின் கனவளவைக் காண்க.
   (ii) அக்கனவளவை லீற்றரில் தருக.
   (iii) 300 லீற்றர் / நிமிடம் என்னும் சீரான கதியில் நீர் பாய்ந்துவரும் ஒரு குழாயின் மூலம் இத்தொட்டியை முற்றாக நிரப்புவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க?

**2.** ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 2 m ஆகவுள்ள ஒரு சதுரமுகித் தொட்டியில் முற்றாக நீரை நிரப்புவதற்கு எடுக்கும் நேரம் 40 நிமிடம் எனின், நீரை வழங்கும் குழாயில் நீர் பாயும் வீதம் எத்தனை லீற்றர் / நிமிடம் ?

**3.** 80 cm நீளமும் 60 cm அகலமும் 40 cm உயரமும் உள்ள ஒரு தொட்டியை 6 லீற்றர்/நிமிடங்கள் என்னும் கதியில் நீர் பாயும் ஒரு குழாயினால் நிரப்புவதற்கு எவ்வளவு நேரம் எடுக்கும் ?

**4.** நீரை விநியோகிக்கும் நிலையமொன்றில் அமைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு நீர்த் தொட்டியின் கனவளவு 1 800 $m^3$ ஆகும். இத்தொட்டியிலிருந்து நீர் 500 $ls^{-1}$ வீதத்தில் விநியோகிக்கப்படுமெனின் தொட்டியில் அரைவாசி நீர் வெளியேறுவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தை நிமிடத்தில் தருக.

**5.** 120 லீற்றர்/நிமிடம் என்னும் வீதத்தில் எரிபொருள் பாயும் ஒரு குழாயின் மூலம் ஒரு வெறுந் தாங்கியை நிரப்புவதற்கு எடுக்கும் நேரம் 40 நிமிடங்களாகும். தாங்கியின் கொள்ளவைக் காண்க.

**பொழிப்பு**

- கதி $= \dfrac{\text{பொருள் இயங்கிய தூரம்}}{\text{பொருள் இயங்கிய நேரம்}}$
- சராசரிக் கதி $= \dfrac{\text{மொத்தத் தூரம்}}{\text{மொத்த நேரம்}}$

**பலவினப் பயிற்சி**

**1.** குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு 0.5 $m^2$ ஆகவுள்ள ஓர் உருளை வடிவ நீர்த் தாங்கியிலிருந்து சீரான வீதத்தில் நீரை நிரப்பும் ஒரு குழாயின் மூலம் நிரப்பும்போது 1 நிமிடம் 10 செக்கன்களில் நீர் நிரல் எழும் உயரம் 70 m எனின் நீர் பாயும் வீதத்தைக் காண்க.

**2.** $X$, $Y$ என்னும் இரு புகையிரத நிலையங்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் 420 km ஆகும். புகையிரத நிலயம் $X$ இலிருந்து 100 $kmh^{-1}$ என்னும் கதியில் செல்லும் புகையிரதம் ஒன்று $Y$ இற்குச் செல்வதற்காக மு.ப. 7.00 இற்குப் புறப்படுகின்றது. அதற்கு 1 மணித்தியாலத்திற்குப் பின்னர் புகையிரத நிலையம் $Y$ இலிருந்து 60 $kmh^{-1}$ என்னும் கதியில் செல்லும் புகையிரம் ஒன்று $X$ இற்குச் செல்வதற்காகப் புறப்படுகின்றது. இரு புகையிரதங்களும் சந்திக்கும் நேரம் யாது?

**3.** $A$, $B$ என்னும் இரு புகையிரத நிலையங்கள் 300 km தூரத்தில் உள்ளன. ஒரு புகையிரதம் $A$ யிலிருந்து $B$ யிற்குச் சென்று திரும்பி வருவதற்கு 12 மணித்தியாலங்கள் எடுக்கும் அதே வேளை $B$ யில் 2 மணித்தியாலங்கள் நிற்கின்றது. முதற் புகையிரதம் புறப்பட்டு 10 மணித்தியாலங்களுக்குப் பின்னர் வேறொரு புகையிரதம் $B$ யிற்கு முதற் புகையிரதத்தின் அதே கதியில் செல்லத் தொடங்கியது. இரு புகையிரதங்களும் சந்த்திக்கும்போது, இரண்டாவதாக புறப்பட்ட புகையிரதம் எவ்வளவு தூரம் சென்றுள்ளது?

# 23 சூத்திரங்கள்

**இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,**

- வர்க்கம், வர்க்கமூலம் கொண்ட சூத்திரங்களில் எழுவாய் மாற்றம் செய்வது தொடர்பாகவும்
- சூத்திரத்திரமொன்றில் ஒரு தெரியாக் கணியம் தவிர மற்றவைகளின் பெறுமானம் தரப்படுகின்றபோது தெரியாக் கணியத்தைக் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

சூத்திரத்திரமொன்றின் மூலம் சில பௌதிகக் கணியங்களுக்கிடையிலுள்ள தொடர்பு தரப்படுகின்றது என்பதை அறிவீர்கள். ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம் $l$ அலகுகளும் அகலம் $b$ அலகுகளும் அதன் பரப்பளவு $A$ அலகுகளும் ஆகும்போது பரப்பளவை நீளம், அகலம் என்பவற்றின் சார்பாக $A = l \times b$ சதுர அலகுகள் எனக் குறிப்பிடலாம். இச்சூத்திரத்தின் $A$ ஆனது எழுவாய் எனப்படும். தேவையாயின் எழுவாயை மாற்றவும் முடியும்.
அதாவது, $b = \frac{A}{l}$ என குறிப்பிடும்போது எழுவாய் $b$ ஆகும். ஒரு சூத்திரத்தின் எழுவாய் மாற்றுவது தொடர்பாக நீங்கள் கற்ற விடயங்களை மீண்டும் நினைவில் கொள்வதற்காக பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

**மீட்டற் பயிற்சி**

1. $v = u + at$ என்னும் சூத்திரத்தில் $u$ ஐ எழுவாயாக்குக.

2. $C = \frac{5}{9}F - 32$ என்னும் சூத்திரத்தில் $F$ ஐ எழுவாயாக்குக.

3. $l = a + (n-1)d$ எனும் சூத்திரத்தில்
   (i) $a$ ஐ எழுவாயாக்குக.
   (ii) $d$ ஐ எழுவாயாக்குக.
   (iii) $n$ ஐ எழுவாயாக்குக.
   (iv) $l = 24,\ a = 3,\ n = 8$ ஆகும்போது $d$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ என்னும் சூத்திரத்தில்

   (i) $r_1$ ஐ எழுவாயாக்குக.
   (ii) $R = 4,\ r_2 = 6$ ஆகும்போது $r_1$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

## 23.1 வர்க்கங்களையும் வர்க்கமூலங்களையும் கொண்ட சூத்திரங்களில் எழுவாயை மாற்றுதல்

கீழே ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவைக் காணும் சூத்திரம் தரப்பட்டுள்ளது. $A$ இன் மூலம் பரப்பளவும் $r$ இன் மூலம் ஆரையும் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

$$A = \pi r^2$$

இங்கு $r$ ஐ எழுவாயாக மாற்றும் முறையை ஆராய்வோம்.

முதலில் $r^2$ ஐ எழுவாயக மாற்றுவோம்.

அதாவது, $r^2 = \dfrac{A}{\pi}$

இனி எழுவாய் மாற்றம் செய்வதற்காக சூத்திரத்தின் இரு பக்கமும் வர்க்கமூலம் காண்போம்.

$\therefore \ r = \pm\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$ ஆகும்.

"$\sqrt{\ }$" என்பதால் நேர்ப் பெறுமானம் குறிபிடப்படுவதால் இக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தும்போது முன்னால் $+$ அல்லது $-$ என்பதை எழுத வேண்டுமென்பதை நினைவில் கொள்க. இவ்வுதாரணத்தில் $r$ இன் மூலம் ஆரை குறிப்பிடப்படுவதால் மறைப் பெறுமானத்தை தவிர்க்கலாம். ஆயினும் தெரியாக் கணியங்களின் கருத்து தெரியாவிடத்து (அல்லது தரப்படாவிடத்து) நேர், மறை ஆகிய இரண்டு குறிகளையும் இடுதல் வேண்டும்.

இனி, வர்க்கமூலத்தைக் கொண்ட ஒரு சூத்திரத்தில் எழுவாயை மாற்றும் முறையை ஆராய்வோம்.

இதற்காக $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ என்னும் சூத்திரத்தைக் கவனிப்போம்.

முதலில் வர்க்கமூலத்தைக் கொண்ட உறுப்பை சமன் குறியீட்டின் ஒரு பக்கத்தில் வைத்து எஞ்சிய உறுப்புகளை மறுபக்கத்திற்குக் கொண்டு செல்வோம்.

$$\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

வர்க்கமூலத்தை நீக்குவதற்காக இரு பக்கமும் வர்க்கிப்போம்.

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)}^{\,2}$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{l}{g}$$

இனி, $l$ ஐ எழுவாயாக மாற்றுவதை இலகுவில் செய்யலாம்.

$$\frac{gT^2}{4\pi^2} = l$$

அதாவது ,

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$ ஆகும்.

**பயிற்சி** 23.1

**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சூத்திரத்திற்கும் எதிரே அடைப்புக்குறி யினுள்ளே தரப்பட்டுள்ள தெரியாக் கணியத்தை எழுவாயாக மாற்றுக.

(i) $v^2 - u^2 = 2as$ $(u)$ (ii) $a^2 + b^2 = c^2$ $(b)$

(iii) $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $(r)$ (iv) $v = \frac{a^2 h}{3}$ $(a)$

(v) $A = \pi\left(R^2 - r^2\right)$ $(r)$ (vi) $E = \frac{1}{2}m\left(v^2 - u^2\right)$ $(u)$

**2.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சூத்திரத்திற்கும் எதிரே அடைப்புக்குறி யினுள்ளே தரப்பட்டுள்ள உறுப்பை எழுவாயாக மாற்றுக.

(i) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ $(g)$ (ii) $\theta = \sqrt{\left(\frac{3rt}{m}\right)}$ $(m)$

(iii) $4\sqrt{p} = q$ $(p)$ (iv) $S = a + \sqrt{b}$ $(b)$

(v) $v = w\sqrt{a^2 - x^2}$ $(a)$ (vi) $A = \pi r\sqrt{\left(h^2 + r^2\right)}$ $(h)$

## 23.2 பிரதியிடல்

சூத்திரங்களிலுள்ள தெரியாக் கணியங்களில் ஒரு தெரியாக் கணியம் தவிர எஞ்சியவற்றின் பெறுமானம் தரப்படும்போது தெரிந்த பெறுமானங்களைப் பிரதியிட்டு தெரியாக் கணியத்தின் பெறுமானத்தைப் பெறலாம்.

கீழே ஒரு கூம்பின் கனவளவு $(v)$, ஆரை $(r)$, உயரம் $(h)$ என்பனவற்றில் தரப்பட்டுள்ள ஒரு சூத்திரம் தரப்பட்டுள்ளது.

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

இங்கு $v = 132$ , $h = 14$ , $r$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. அதற்காக முதலில் $r$ ஐ எழுவாயாக மாற்றுவோம்.

$$\frac{3v}{\pi h} = r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{3v}{\pi h}}$$

இனித் தெரிந்த பெறுமானங்களைப் பிரதியிடுவோம்.

$$r = \sqrt{\frac{3 \times 132}{\frac{22}{\cancel{7}_1} \times \cancel{14}_2}}$$

$$r = \sqrt{9}$$

$$r = 3$$

இப்பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்காக முதலில் $r$ ஐ எழுவாயாக்குவது அவசியமற்றது. முதலில் பிரதியிட்டுப் பின்னர் $r$ ஐ எழுவாயாக மாற்றி கீழேயுள்ளவாறு செய்யலாம்.

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$132 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{\cancel{7}_1} \times r^2 \times \cancel{14}_2$$

$$\frac{132 \times 3}{22 \times 2} = r^2$$

$$r^2 = 9$$

$$r = 3$$

இரண்டு முறைகளிலும் ஒரே விடை பெறப்படுகின்றது என்பது தெளிவு. எனவே மேற்குறித்த இரண்டு முறைகளிலும் எந்தவொரு முறையையும் பெறுமானம் காண்பதற்குப் பயன்படுத்தலாம். ஆயினும் எழுவாய் மாற்றத்தைப் பற்றி அறிந்து கொள்வதில் பல்வேறு பயன்கள் உள்ளன. உதாரணமாக ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்ட கனவளவுகளைக் கொண்ட பல கூம்புகளின் ஆரைகளைக் காணவேண்டுமாயின் மேலே தரப்பட்டுள்ள கூம்பின் கனவளவைக் குறிக்கும் சூத்திரத்தில் $r$ ஐ எழுவாயாக மாற்றியிருப்பின் கணித்தல் மிக இலகுவாகும். அவ்வாறே கணினி அல்லது கணிகருவி மூலம் இக்கணிதச் செய்கைகளைச் செய்வதற்கு எழுவாய் மாற்றம் செய்துகொள்வது அவசியமாகும்.

**பயிற்சி 23.2**

**1.** $v^2 = u^2 + 2as$ என்னும் சூத்திரத்தில்,

(i) $v = 10,\ u = 0,\ s = 10$ ஆகும்போது $a$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) $v = 10,\ u = 5,\ a = 2$ ஆகும்போது $s$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(iii) $v = 10,\ a = 3,\ s = 6$ ஆகும்போது $u$ இன் பெறுமானம் காண்க.

2. $x = \sqrt{y+z}$ ஆயின்,

(i) $y = 6$ , $z = 10$ ஆகும்போது $x$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) $x = 5$ , $z = 5$ ஆகும்போது $y$ இன் பெறுமானம் காண்க.

3. $k^2 = lm$ ஆயின் $l = 9$ , $m = 4$ ஆகும்போது $k$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

4. $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ என்னும் சூத்திரத்தில்

(i) $u = 0$ , $a = 5$ , $s = 250$ ஆகும்போது $t$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) $u = 5$, $a = 10$ , $s = 30$ ஆகும்போது $t$ இன் பெறுமானம் காண்க.

5. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ என்னும் சூத்திரத்தில் $l = 490$ , $g = 10$ , $\pi = \frac{22}{7}$ ஆகும்போது $T$ இன் பெறுமானம் காண்க.

## பலவினப் பயிற்சி

1. அடியின் ஆரை $r$ , உயரம் $h$, கனவளவு $v$ உடைய உருளையொன்றின் $r$, $h$, $v$ ஆகியவற்றுக்கிடையிலான தொடர்பு $v = \pi r^2 h$ இன் மூலம் தரப்படும். அடியின் ஆரை 50 cm உடைய ஓர் உருளை வடிவ நீர்த் தாங்கியில் 70 cm உயரத்துக்கு நீர் நிரம்பியுள்ளது. தாங்கியிலுள்ள நீரின் கனவளவைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ எனக் கொள்க).

2. ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $A$ $cm^2$ என்பதை ஆரை $r$ இல் குறிப்பிடும்போது $A = 4\pi r^2$ என்னும் சூத்திரத்தினால் தரப்படும். இங்கு $\pi = \frac{22}{7}$ எனக் கொண்டு

(i) கோளத்தின் ஆரையை மேற்பரப்பின் பரப்பளவிலிருந்து காண்க.

(ii) கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு 616 $cm^2$ ஆயின் அதன் ஆரையைக் காண்க.

3. இயங்கும் பொருள் ஒன்றின் இயக்கச் சக்தி $E = \frac{1}{2}mv^2$ இன் மூலம் தரப்படும். இங்கு $E$ யின் மூலம் இயக்கச் சக்தியும் $m$ இன் மூலம் அதன் திணிவும் $v$ இன் மூலம் பொருளின் வேகமும் தரப்படும்.

(i) பொருளின் வேகத்தை அதன் திணிவு , இயக்கச் சக்தி என்பவற்றில் தருக.

(ii) பொருளின் வேகம் 3 $ms^{-1}$ உம் பொருளின் திணிவு 2.4 kg உம் ஆயின் பொருளின் இயக்கச் சக்தியைக் காண்க.

4. ஒரு செங்கோண முக்கோணியில் செம்பக்கம் $x$ உம் எஞ்சிய பக்கங்கள் $a$, $b$ உம் ஆகும். பைதகரசின் தேற்றப்படி $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ ஆகும். இங்கு $x = 25$ cm உம் $a = 24$ cm உம் ஆயின் $b$ ஐக் காண்க.

**5.** அசையும் ஒரு பொருளின் சக்தி $E = mgh + \frac{1}{2}mv^2$ என்னும் சூத்திரத்தின் மூலம் தரப்படும். $E$ இன் மூலம் பொருளின் சக்தியும் $m$ இன் மூலம் அதன் திணிவும் $v$ இன் மூலம் பொருளின் வேகமும் $h$ இன் மூலம் பொருள் அமைந்துள்ள உயரமும் தரப்படும்.

(i) பொருளின் திணிவை மற்றைய கணியங்களில் தருக.

(ii) பொருளின் வேகத்தை மற்றைய கணியங்களில் தருக.

(iii) 3 kg திணிவையுடைய ஓர் அசையும் பொருளானது நிலத்திலிருந்து 5 m தூரத்திலுள்ளபோது அதன் சக்தி 153 N ஆகும். பொருள் அசையும் வேகத்தைக் காண்க. ($g = 10\ ms^{-1}$ எனக் கொள்க.)

# 24 கூட்டல் விருத்தி

**இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,**

- கூட்டல் விருத்திகளை இனங்காண்பதற்கும் அவற்றுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

## கூட்டல் விருத்தி

நீங்கள் முன்னைய வகுப்புக்களில் வெவ்வேறு எண்கோலங்கள் பற்றிக் கற்றுள்ளீர்கள். எண்கோலங்களை எண் தொடர்கள் என்றும் அழைப்போம். கீழே தரப்பட்டுள்ள எண்தொடர் பற்றி ஆராய்வோம்.

3, 8, 13, 18...

இத்தொடரின் முதலாம் உறுப்பு 3 உம் இரண்டாம் உறுப்பு 8 உம் என்றவாறு உள்ளது. யாதேனும் அடுத்துள்ள உறுப்புகள் (அருகருகே அமைந்துள்ள உறுப்புகள்) இரண்டைக் கருத்தில்கொண்டு அவற்றின் பின்னேயுள்ள உறுப்பிலிருந்து முன்னேயுள்ள உறுப்பைக் கழிக்கும்போது ஒரு மாறாப் பெறுமானம் கிடைப்பது இங்குள்ள சிறப்பம்சமாகும்.இங்கு அம்மாறாப் பெறுமானம் 5 ஆகும்.
அவ்வாறான மேலுமொரு தொடர் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

8, 5, 2, –1, –4...

இத்தொடரிலும் இரண்டு அடுத்துள்ள உறுப்புகளை எடுத்து பின்னேயுள்ள உறுப்பிலிருந்து முன்னேயுள்ள உறுப்பைக் கழிக்கும்போது ஒரு மாறாப் பெறுமானம் கிடைகின்றது. இங்கு அம்மாறாப் பெறுமானம் –3 ஆகும்.

இவ்வாறான எண்தொடர்கள் **கூட்டல் விருத்தி** எனப்படும். முதல் உறுப்புத் தவிர்ந்த எந்தவொரு உறுப்பிலிருந்தும் அதற்கு முன்னேயுள்ள உறுப்பைக் கழிக்கும்போது பெறப்படும் மாறாப் பெறுமானம் **பொதுவித்தியாசம்** என அழைக்கப்படுவதுடன் அது $d$ இன் மூலம் குறிக்கப்படும்.
இதற்கேற்ப,

ஒரு கூட்டல் விருத்தி எனப்படுவது முதலாம் உறுப்புத் தவிர எந்தவோர் உறுப்பிலிருந்தும் அதற்கு முன்னேயுள்ள உறுப்பைக் கழிக்கும்போது ஒரு மாறாப் பெறுமானம் கிடைக்குமாறுள்ள ஓர் எண் தொடராகும்

ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் பொது வித்தியாசமாகிய $d$ ஐப் பின்வருமாறு காணலாம்.

பொதுவித்தியாசம் $(d)$ = (முதல் உறுப்பல்லாத எந்தவொரு உறுப்பு) – (அதற்கு முன்னேயுள்ள உறுப்பு)

**மீட்டற் பயிற்சி**

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடரும் கூட்டல் விருத்தியாகுமா எனத் தீர்மானிக்க.
   (i) 9, 11, 13, 16, ...  (ii) – 8, – 5, – 1, 2, ...
   (iii) 2.5, 2.55, 2.555, 2.5555, ...  (iv) $5\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4}, 6, 6\frac{1}{2}, ..$
   (v) 1, –1, 1, –1, ...

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கூட்டல் விருத்தியிலும் பொது வித்தியாசத்தைக் காண்க.
   (i) 12, 17, 22, ...  (ii) 10, 6, 2, ...
   (iii) –5, –1, 3, ...  (iv) –2, –8, –14, ...
   (v) 2.5, 4, 5.5, ...

## 24.1 ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் $n$ ஆம் உறுப்பைக் காணல்

ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் உறுப்புகளைப் பெயரிடப் பின்வரும் குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்படும்

$T_1$= முதலாம் உறுப்பு
$T_2$= இரண்டாம் உறுப்பு
$T_3$= மூன்றாம் உறுப்பு

உதாரணமாக 6, 8, 10, 12, 14, ... என்னும் கூட்டல் விருத்தியில்,

$T_1 = 6,\ T_2 = 8,\ T_3 = 10,\ T_4 = 12,\ T_5 = 14...$ என்றவாறு எழுதலாம்.

இக்கூட்டல் விருத்தியில் 25 ஆம் உறுப்பு யாது என உங்களால் கூறமுடியுமா? அதாவது $T_{25}$ இன் பெறுமானம் யாது? மேலேயுள்ள கோலத்திற்கேற்பப் பெறப்படும் உறுப்புகளைத் தொடர்ந்தும் எழுதிச் செல்லும்போது குறித்த ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் 25 ஆம் உறுப்பு பெறப்படும் என்பது தெளிவாகும். இதற்கேற்ப 25 உம் உறுப்பு 54 ஆகும்.

அதாவது,

$$T_{25} = 54.$$

இனி இக்கூட்டல் விருத்தியின் 500 ஆம் உறுப்பை காணவேண்டுமாயின் நீங்கள் அதனை எவ்வாறு காண்பீர்கள். அதற்கெனத் தரப்பட்டுள்ள கோலத்திற்கேற்ப 500 உறுப்பு வரை எழுத வேண்டியுள்ளதுடன் அது மிகவும் சிரமமான ஒரு செயலாகும். ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் எந்தவொரு உறுப்பையும் மிக இலகுவாகக் காண்பதற்குப் பயன்படுத்தக்கூடிய ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்கும் முறையை இப்பொழுது ஆராய்வோம்.

இச்சூத்திரத்தைப் பெறும் முறையை 6, 8, 10, 12, ... என்னும் கூட்டல் விருத்தியை உதாரணமாகக் கொண்டு பார்ப்போம்.

இங்கு முதலாம் உறுப்பு 6 உம் பொது வித்தியாசம் 2 உம் ஆகும். முதலாம் உறுப்பு, பொது வித்தியாசம் என்பவற்றிலிருந்து மேற்குறித்த விருத்தியின் உறுப்புகளை உருவாகியுள்ள முறையை கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் நன்கு அவதானிக்க.

| எழுதக்கூடிய உறுப்பு | உறுப்பின் பெறுமானம் | உறுப்பின் பெறுமானம், முதலாம் உறுப்பு, பொது வித்தியாசம் சார்பில் |
|---|---|---|
| $T_1$ | 6 | $6 + 0 \quad = 6 + (1 - 1) \times 2$ |
| $T_2$ | 8 | $6 + 2 \quad = 6 + (2 - 1) \times 2$ |
| $T_3$ | 10 | $6 + 2 + 2 \quad = 6 + (3 - 1) \times 2$ |
| $T_4$ | 12 | $6 + 2 + 2 + 2 = 6 + (4 - 1) \times 2$ |
| ... | ... | ... ... |
| ... | ... | ... ... |

இக்கோலத்திற்கேற்ப 500 ஆம் உறுப்பைக் கணிப்போம்.

$$T_{500} = 6 + (500 - 1) \times 2$$
$$= 6 + 499 \times 2$$
$$= 6 + 998$$
$$= 1004$$

இதற்கேற்ப 500 ஆம் உறுப்பு 1004 ஆகும்.

மேற்குறித்த கோலத்தை மேலும் பொதுமைப்படுத்தி எழுத முடியுமா? அதாவது முதலாம் உறுப்பு $a$ உம் பொது வித்தியாசம் $d$ உம் உடைய ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் $n$ ஆம் உறுப்புக்கான ஒரு சூத்திரத்தை $T_{500} = 6 + (500 - 1) \times 2$ என்னும் கோவையின்மீது கவனஞ் செலுத்திக் காண்போம்.

முதலாம் உறுப்பு $a$ உம் பொது வித்தியாசம் $d$ உம் உடைய ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் $n$ ஆம் உறுப்பைப் பெற்றுக்கொள்வதற்காக மேலேயுள்ள கோலத்தைப் பின்பற்றினால் $T_n = a + (n - 1)\, d$ என நீங்கள் காண்பீர்கள் அல்லவா? இச்சூத்திரத்தில் எமது குறிப்பீட்டின்படி $T_n$ மூலம் தரப்படுவது $n$ ஆம் உறுப்பாகும்.

இதற்கேற்ப முதலாம் உறுப்பு $a$ உம் பொது வித்தியாசம் $d$ யும் ஆகவுள்ள கூட்டல் விருத்தியில் $n$ ஆம் உறுப்பாகிய $T_n$ என்பது

$\boxed{T_n = a + (n - 1)\, d}$ என்னும் சூத்திரத்தின் மூலம் பெறப்படும்.

இச்சூத்திரத்தில் உள்ள முக்கியதுவம் யாதெனில் ஒரு கூட்டல் விருத்தியிலுள்ள நான்கு தெரியாக் கணியங்களாகிய $a, d, n, T_n$ ஆகியவற்றுக்கிடையே உள்ள தொடர்பாகும். ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் இந்நான்கு தெரியாக் கணியங்களில் யாதேனும் மூன்று கணியங்கள் தெரிகின்றபோது எஞ்சிய தெரியாக் கணியத்தின் பெறுமானத்தை மேற்படி சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காணலாம். இனி இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கூட்டல் விருத்திகள் பற்றிய பிரசினங்களைத் தீர்க்கும் முறை பற்றி ஆராய்வோம்.

**உதாரணம்** 1

($a$ , $d$, $n$ **என்பன தரப்படும்போது** $T_n$ **ஐக் காணல்** )

3, 7, 11, 15, ... என்னும் கூட்டல் விருத்தியில் 15 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.
இங்கு $a = 3$, $d = 7 - 3 = 4$, $n = 15$

இப் பெறுமானங்களை $T_n = a + (n - 1)\ d$ என்னும் சூத்திரத்தில் பிரதியிடுவதால்,

$$T_{15} = 3 + (15 - 1) \times 4$$
$$= 3 + 56$$
$$= 59$$

$\therefore$ 15 ஆம் உறுப்பு 59 ஆகும்.

**உதாரணம்** 2

( $d$, $n$, $T_n$ **என்பன தரப்படும்போது** $a$ **ஐக் காணல்**)

ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் பொது வித்தியாசம் 4 உம் 26 ஆம் உறுப்பு 105 உம் ஆகும். முதலாம் உறுப்பைக் காண்க.
இங்கு, $d = 4$, $n = 26$, $T_n = 105$

$T_n = a + (n - 1)\ d$ என்னும் சூத்திரத்தில் பிரதியிடுவதால்,

$$\therefore T_{26} = a + (26 - 1) \times 4$$
$$105 = a + (26 - 1) \times 4$$
$$\therefore 105 - 100 = a$$
$$a = 5$$

$\therefore$ முதலாம் உறுப்பு 5 ஆகும்.

**உதாரணம்** 3

($a$, $n$, $T_n$ **என்பன தரப்படும்போது** $d$ **ஐக் காணல்**)

ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் முதலாம் உறுப்பு –32 உம் 12 ஆம் உறுப்பு 1 உம் ஆகும்.
$a = -32$ , $n = 12$ , $T_{12} = 1$.

$T_n = a + (n - 1)\ d$ என்னும் சூத்திரத்தில் பிரதியிடுவதால்,

$$1 = -32 + (12 - 1) \times d$$
$$33 = 11 \times d$$
$$\frac{33}{11} = d$$
$$d = 3$$

$\therefore$ பொது வித்தியாசம் 3 ஆகும்.

**உதாரணம் 4**

($a$ , $d$ , $T_n$ **என்பன தரப்படும்போது** $n$ **ஐக் காணல்**)

30, 25, 10, ... என்னும் கூட்டல் விருத்தியில் – 65 எத்தனையாவது உறுப்பாகும் ?
இங்கு

$a = 30,\ d = -5,\ T_n = -65$

$T_n = a + (n-1)\,d$ என்னும் சூத்திரத்தில் இப்பெறுமானங்களைப் பிரதியிடுவதால்

$-65 = 30 \times (n-1) \times (-5)$

$-65 = 30 - 5n + 5$

$-65 - 35 = -5n$

$\dfrac{-100}{-5} = n$

$n = 20$

$\therefore -65$ என்பது 20 ஆம் உறுப்பாகும்.

ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் $a$, $d$, $n$, $T_n$ ஆகிய தெரியாக் கணியங்களில் இரண்டு தெரியாக் கணியங்கள் தரப்படாதவிடத்து போதுமான தரவுகள் தரப்பட்டுள்ளபோது ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடி ஒன்றைத் தீர்த்து அத்தெரியாக் கணியங்களைக் காணலாம்.

**உதாரணம் 5**

ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் ஏழாவது உறுப்பு 38 உம் பன்னிரண்டாவது உறுப்பு 63 உம் ஆகும். இவ்விருத்தியின்

(i) முதலாம் உறுப்பினதும் பொது வித்தியாசத்தினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.
(ii) இவ்விருத்தியில் 20 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

(i) இங்கு $n = 7$ ஆகும்போது $T_7 = 38$, $n = 12$ ஆகும்போது $T_{12} = 63$ ஆகும்.

முதலாம் உறுப்பை $a$ எனவும் பொது வித்தியாசத்தை $d$ எனவும் கொண்டு
$T_n = a + (n-1)\,d$ இல் பிரதியிடுவதால்

$38 = a + (7-1) \times d$ $\qquad$ $63 = a + (12-1) \times d$

$38 = a + 6d$ ——— ① $\qquad$ $63 = a + 11d$ ——— ②

② – ①

$63 - 38 = a + 11d - (a + 6d)$

$25 = a + 11d - a - 6d$

$25 = 5d$

$5 = d$

$d = 5$ ஐ ① இல் பிரதியிடுவதால்

$38 = a + 6 \times 5$

$38 - 30 = a$

$a = 8$

$\therefore$ முதலாம் உறுப்பு 8 உம் பொது வித்தியாசம் 5 உம் ஆகும்.

(ii) $T_n = a + (n-1)\,d$ இல் பிரதியிடுவதால்

$T_{20} = 8 + (20-1) \times 5$
$= 8 + 19 \times 5$
$= 8 + 95$
$= 103$

$\therefore$ 20 ஆம் உறுப்பு 103 ஆகும்.

**உதாரணம் 6**

குறித்த ஒரு தொடரில் $n$ ஆம் உறுப்பானது $T_n = 3n + 4$ இன் மூலம் தரப்படுகின்றது.

(i) இத்தொடரின் முதல் நான்கு உறுப்புகளையும் எழுதுக.

(ii) இவ்விருத்தியில் $n-1$ ஆம் உறுப்பாகிய $T_{n-1}$ இதற்கான கோவையை எழுதி இத்தொடர் ஒரு கூட்டல் விருத்தி எனக் காட்டுக.

(iii) விருத்தியில் 169 எத்தனையாம் உறுப்பு எனக் காட்டுக.

(iv) பெறுமானம் 95 ஐ உடைய ஓர் உறுப்பு இருக்க முடியாது எனக் காட்டுக.

(i) $T_n = 3n + 4$

n = 1 ஆகும்போது $T_1 = 3 \times 1 + 4 = 7$

n = 2 ஆகும்போது $T_2 = 3 \times 2 + 4 = 10$

n = 3 ஆகும்போது $T_3 = 3 \times 3 + 4 = 13$

n = 4 ஆகும்போது $T_4 = 3 \times 4 + 4 = 16$

$\therefore$ முதல் நான்கு உறுப்புகளும் 7, 10, 13, 16 ஆகும்.

(ii) $T_{n-1} = 3(n-1) + 4$
$= 3n - 3 + 4$
$= 3n + 1$

$T_n - T_{n-1} = (3n + 4) - (3n + 1)$
$= 3$

இது மாறாப் பெறுமானமாகும்.

$\therefore$ இது ஒரு கூட்டல் விருத்தியாகும்.

(iii) $T_n = 169$

$T_n = 3n + 4$ இல் பிரதியிடுவதால்

$169 = 3n + 4$

$169 - 4 = 3n$

$\frac{165}{3} = n$

$55 = n$

$\therefore$ 169 ஆனளது 55 ஆம் உறுப்பாகும்.

(iv) பெறுமானம் 95 ஐ உடைய ஓர் உறுப்பு இருப்பின் $T_n = 95$ ஆகுமாறு $n$ ஆனது நேர் நிறைவெண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது,

$95 = 3n + 4$

$95 - 4 = 3n$

$3n = 91$

$\therefore n = \frac{91}{3}$

எனவே, $n$ இற்கான ஒரு நேர் நிறை வெண் கிடைக்காது. அதனால் பெறு மானம் 95 ஐ உடைய ஓர் உறுப்பு இருக்க முடியாது.

**பயிற்சி 24.1**

**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்குமுரிய கூட்டல் விருத்தியில் முதல் ஐந்து உறுப்புகளையும் எழுதுக.

(i) $a = 5,\ d = 2$
(ii) $a = -3,\ d = 4$
(iii) $a = 4.5,\ d = 2.5$
(iv) $a = 10\frac{1}{4},\ d = -\frac{1}{2}$
(v) $a = 2x,\ d = x + 3$

**2.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கூட்டல் விருத்தியிலும் அவற்றிற்கு எதிரே (அடைபினுள்) தரப்பட்டுள்ள உறுப்பைக் காண்க.

(i) 13, 15, 17, ... (10 ஆம் உறுப்பு)
(ii) 40, 38, 36, ... (21 ஆம் உறுப்பு)
(iii) –2, –7, –12, ...(15 ஆம் உறுப்பு)
(iv) –3, 2, 7, ...(20 ஆம் உறுப்பு)
(v) 6.5, 8, 9.5, ... (12 ஆம் உறுப்பு )
(vi) $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, ... (11 ஆம் உறுப்பு)
(vii) $12\frac{1}{2}$, 12, $11\frac{1}{2}$, ... (18 ஆம் உறுப்பு)

**3.** **(I)** கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து ஒவ்வொரு கூட்டல் விருத்தியினதும் முதல் உறுப்பைக் காண்க.

**a.** $d = 5,\ T_{21} = 101$
**b.** $d = -3,\ T_{35} = -113$
**c.** $d = 2\frac{1}{2},\ T_{37} = 93$

**(II)** கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து ஒவ்வொரு கூட்டல் விருத்தியினதும் பொது வித்தியாசத்தைக் காண்க.

**a.** $a = 60,\ T_{15} = 102$
**b.** $a = -30,\ T_{35} = -25$
**c.** $a = 4\frac{1}{4},\ T_{37} = -7\frac{3}{4}$

**(III)** கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் கூட்டல் விருத்தியின் எத்தனையாவது உறுப்பு தரப்பட்டுள்ளது எனக் காண்க.

**a.** $a = 9,\ d = 4,\ T_n = 69$
**b.** $a = -20,\ d = \frac{1}{2},\ T_n = 35$
**c.** $a = 7,\ d = \frac{1}{2},\ T_n = 27$

**4.** கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து ஒவ்வொரு கூட்டல் விருத்தியிலும் $n$ ஆம் உறுப்பை $n$ இன் சார்பில் இயலுமான வரை எளிய வடிவில் எழுதுக.

(i) –15, –12, –11, –8, ...

(ii) 7, 12, 17, 22, ...

(iii) $3\frac{1}{4}$, 4, $4\frac{3}{4}$, ...

(iv) 67, 64, 61, ...

**5.** $n$ ஆம் உறுப்பு (i) $2n + 1$ (ii) $5n - 1$ (iii) $8 - n$ (iv) $20 - 5n$ ஆகவுள்ள ஒவ்வொரு தொடரிலும்

(i) முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.

(ii) பொது வித்தியாசத்தைக் காண்க.

(iii) 15 ஆம் உறுப்பின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

**6.** 1 தொடக்கம் 150 வரைக்கும் உள்ள எண்களில்

(i) 2 இன் மடங்குகள் எத்தனை உண்டு?

(ii) 3 இன் மடங்குகள் எத்தனை உண்டு?

(iii) 5 இன் மடங்குகள் எத்தனை உண்டு?

**7.** (i) ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் மூன்றாம் உறுப்பு 7 உம் ஆறாம் உறுப்பு 13 உம் ஆகும். விருத்தியின் பதினைந்தாம் உறுப்பைக் காண்க.

(ii) ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் ஐந்தாம் உறுப்பு 34 உம் பதினைந்தாம் உறுப்பு 9 உம் ஆயின் – 6 என்பது விருத்தியில் எத்தனையாம் உறுப்பாகும்.

(iii) ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் ஐந்தாம் உறுப்பின் பெறுமானம் 22 உம் பத்தாம் உறுப்பின் பெறுமானம் 47 உம் ஆயின் விருத்தியின் பதினைந்தாம் உறுப்பின் பெறுமானம் மூன்றாம் உறுப்பின் பெறுமானத்தின் ஆறுமடங்கு எனக் காட்டுக.

(iv) ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் மூன்றாம் ஆறாம் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 42 உம் இரண்டாம் பத்தாம் உறுப்புக்களின் கூட்டுதொகை 54 உம் ஆயின் விருத்தியில் 63 எத்தனையாம் உறுப்பாகும்? பெறுமானம் 30 ஐ உடைய ஓர் உறுப்பு இவ்விருத்தியில் இருக்கமுடியாது எனக் காட்டுக.

(v) இரண்டாம் உறுப்பு 10 ஆகவுள்ள ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் பன்னிரண்டாம் ஆம் உறுப்பானது 10 ஆம் உறுப்பிலும் 12 கூடியதாகும். இவ்விருத்தியில் முதலாவது உறுப்பையும் பொது வித்தியாசத்தையும் கண்டு இருபத்தியாறாம் உறுப்பின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(vi) 3,7,11,...என்னும் கூட்டல் விருத்தியில் எத்தனையாம் உறுப்பு ஏழாம் உறுப்பிலும் 52 கூடியதாகும்.

## 24.2 ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ... என்னும் கூட்டல் விருத்தியைக் கவனத்தில் கொள்வோம். இவ்விருத்தயில் முதல் 8 உறுப்புகள் எழுதப்பட்டுள்ளன. இதில் முதல் எட்டு உறுப்புக்களினதும் கூட்டுத்தொகை

$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 80$ ஆகும்.

இப்பாடத்தில் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் குறிப்பிடுவதற்கு " $S_n$ " என்னும் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துவோம். இதற்கேற்ப மேற்குறித்த விருத்தியில் 8 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.

$$S_8 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$$
$$S_8 = 80$$

ஆயினும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாயின் நாம் மேற்குறித்தவாறு எல்லா உறுப்புகளையும் கூட்டுவது சிரமமாகும். இச்சிரமத்தைத் தவிர்த்துக் கொள்வதற்காக கூட்டுத்தொகையைக் காண்பதற்கு ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்கும் முறையை இப்போது பார்ப்போம். விருத்தியில் உள்ள ஒழுங்கில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$S_8 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$ ——— (1)

மேலேயுள்ள கோவையிலுள்ள உறுப்புகளை மீண்டும் பின்னிருந்து முன்னாக பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$S_8 = 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3$ ——— (2)

மேலே எழுதப்பட்ட (1) , (2) என்பவற்றில் ஒத்த உறுப்புகளைக் கூட்டும்போது பின்வருமாறான ஒரு புதிய கோவை கிடைக்கும்.

(1) + (2) $\quad 2S_8 = (3 + 17) + (5 + 15) + (7 + 13) + (9 + 11) + (11 + 9) + (13 + 7) + (15 + 5) + (17 + 3)$

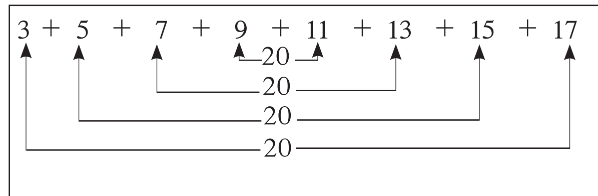
$$2S_8 = 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20$$

$\therefore 2S_8 = 8 \times 20$ (பெறுமானங்கள் 20 ஆகவுள்ள 8 உறுப்புகள் உண்டு)

$$S_8 = \frac{8}{2} \times 20$$

$\therefore$ எட்டு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $= 80$

மேலே $\frac{8}{2} \times 20$ ஐப் பெற்ற முறையைப் பின்வரும் முறையிலும் முன்வைக்கலாம்.




இவ்விருத்தியில் 8 உறுப்புகள் உண்டு. இங்கு முதல் உறுப்பையும் இறுதி உறுப்பையும் கூட்டும்போது பெறுமானம் 20 ஆகும். இவ்வாறு மேலே காட்டப்பட்டுள்ள முறையில் நான்கு சோடிகளின் கூட்டுத்தொகையாகக் காட்டலாம்.

இச்சோடிகளின் எண்ணிக்கை விருத்தியிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையின் அரைமடங்காகும். அப்போது எல்லா உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக அமைவது உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையின் அரைமடங்கினதும் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையினதும் பெருக்கமாகும்.
அதாவது, $S_8 = \frac{8}{2}[3+17]$ ஆகும்.

மேலேயுள்ள கணித்தலில் பெற்றுக்கொண்ட விடையிலிருந்து முதலாம் உறுப்பு $a$ உம் பொது வித்தியாசம் $d$ உம் இறுதி உறுப்பு ($n$ ஆம்) $l$ உம் ஆகும்போது விருத்தியில் $n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $(S_n)$ இற்கான ஒரு கோவையைப் பின்வருமாறு உருவாக்கலாம்.

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots (l - 2d) + (l - d) + l \text{ ——— } ①$$

மேலேயுள்ள விருத்தியின் உறுப்புகளை பின்னிருந்து முன்னாக எழுதும்போது

$$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + (l - 3d) + \dots (a + 2d) + (a + d) + a \text{ ——— } ②$$

எனப் பெறப்படும்.
மேலேயுள்ள ①, ② என்பவற்றில் காட்டப்படும் இரண்டு விருத்திகளினதும் உறுப்புகளை முன்னிருந்து ஒழுங்காகக் கூட்டும்போது பின்வருமாறான ஒரு தொடர்பு கிடைகின்றது.

① + ② $2S_n = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \dots (a + l) + (a + l) + (a + l)$
$2S_n = n(a + l)$ [ இங்கு உறுப்பு $(a + l)$ என்பது $n$ தடவைகள் உள்ளதால்]
$\therefore S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ ஆகும்.

முதலாம் உறுப்பு $a$ உம் இறுதி உறுப்பு $l$ உம் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n$ உம் ஆகும்போது
முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைப் பின்வரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிக்கலாம்.

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a + l)}$$

உதாரணமாக 1 இலிருந்து 100 வரையிலான எல்லா முழு எண்களினதும் கூட்டுத்தொகையைக் காணவேண்டுமாயின் மேலேயுள்ள சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி இலகுவாகச் செய்யக்கூடிய முறையை ஆராய்வோம்.

உரிய விருத்தி 1, 2, 3, 4, ... 99, 100 ஆகும்.
இங்கு $a = 1, l = 100$ , $n = 100$ ஆகும்.
∴ 100 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $S_{100} = \frac{100}{2}(1+100)$

$$S_{100} = 50 ( 101 )$$
$$\therefore S_{100} = 5050.$$

சில விருத்திகளில் குறிப்பிடப்படும் ஏதேனும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை வரை (இறுதி உறுப்பு தரப்படாமல்) உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காணவேண்டி ஏற்படும். அவ்வாறான சந்தர்ப்பங்களில் மேலுள்ள சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த முடியாது. அவ்வாறான பிரசினங்களில் தேவையான விடையைப் பெற்றுக்கொள்வதற்குப் பொருத்தமான ஒரு சூத்திரத்தை மேலேயுள்ள சூத்திரத்திலிருந்து உருவாக்கக்கூடிய முறையைப் பார்ப்போம்.

மேலேயுள்ள சூத்திரத்தில் இறுதி உறுப்புக்குப் பதிலாக $l = a + (n - 1) d$ என்பதை பிரதியிட்டு பின்வரும் முறையில் பொருத்தமான சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.
முதலாம் உறுப்பு $a$, இறுதி உறுப்பு $l$ உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n$ ஆகும்போது உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை. $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ ஆகும்.
மேலேயுள்ள சூத்திரத்தில் $l$ இற்குப் பதிலாக $a + (n - 1) d$ ஐப் பிரதியிடும்போது

$S_n = \frac{n}{2}\{a+a+(n-1)d\}$ எனப் பெறப்படும்

இதனை $S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ என மேலும் சுருக்கி எழுதலாம்.

இதற்கேற்ப முதலாம் உறுப்பு $a$ உம் பொது வித்தியாசம் $d$ உம் ஆகவுள்ள முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்பதற்கு

$S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணமாக நாம் மேலே எடுத்த 1 இலிருந்து 100 வரையிலான முழு எண் விருத்தியில் முதல் 30 இரட்டை எண்களின் கூட்டுத்தொகையைப் பின்வரும் முறையில் இலகுவாகக் காணலாம்.

உரிய விருத்தி 2, 4, 6, 8, ... ஆகும்.
இங்கு $a = 2$ , $d = 2$, $n = 30$ ஆகும்.

$S_n = \frac{n}{2}\left\{2a + \left(n-1\right)d\right\}$ என்னும் சூத்திரத்தில் மேலேயுள்ள பெறுமானங்களைப் பிரதியிடும்போது.

$$S_{30} = \frac{30}{2}\left\{2\times 2 + \left(30-1\right)\times 2\right\}$$
$$= \frac{30}{2}\left\{4 + 29\times 2\right\}$$
$$= \frac{30}{2}\left\{62\right\}$$
$$= 15\times 62$$
$$S_{30} = 930$$

$\therefore$ இவ்விருத்தியில் முதல் 30 இரட்டை எண்களின் கூட்டுத்தொகை 930 ஆகும்.

இதற்கேற்ப $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்பதற்கு நாம் கீழே தரப்படும் சூத்திரங்களில் ஒன்றை அல்லது இரண்டையும் சந்தர்ப்பத்திற்கேற்பப் பயன்படுத்தலாம்.

- ★ முதலாம் உறுப்பும் இறுதி உறுப்பும் தெரியும்போது $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்பதற்கு $S_n = \frac{n}{2}\left(a + l\right)$ சூத்திரத்தையும்
- ★ முதல் உறுப்பும் பொது வித்தியாசமும் தெரியும்போது $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்பதற்கு $S_n = \frac{n}{2}\left\{2a + \left(n-1\right)d\right\}$ சூத்திரத்தையும் பயன்படுத்தலாம்.

மேலே பெற்ற சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி சில உதாரணங்கள் தீர்ப்பதைப் பார்ப்போம்.

**உதாரணம்** 1

5, 10, 15, 20,... என்னும் கூட்டல் விருத்தியில் முதல் 12 உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

இங்கு $a = 5$ , $d = 5$ , $n = 12$

$S_n = \frac{n}{2}\left\{2a + \left(n-1\right)d\right\}$ இல் பிரதியிடுவதால்

$$S_{12} = \frac{12}{2}\{2\times5+(12-1)\times5\}$$

$$= \frac{12}{2}\{10+11\times5\}$$

$$= 6 \ \{10+55\}$$

$$= 6\times65$$

$$= 390$$

$\therefore$ முதல் 12 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 390 ஆகும்.

**உதாரணம் 2**

16 உறுப்புகளைக் கொண்ட கூட்டல் விருத்தியொன்றில் முதலாம் உறுப்பு 75 உம் பொது வித்தியாசம் $-5$ உம் இறுதி உறுப்பு பூச்சியமும் ஆகும். அவ்விருத்தியின் எல்லா உறுப்புகளினதும் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க

இங்கு $n = 16$ , $a = 75$ , $d = -5$ , $l = 0$

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l) \text{ இல் பிரதியிடுவதால்,}$$

$$S_{16} = \frac{16}{2}(75+0)$$

$$= \frac{16}{2}\times75$$

$$= 8\times75$$

$$= 600$$

எல்லா உறுப்புகளினதும் கூட்டுத்தொகை 600 ஆகும்.

**உதாரணம் 3**

70, 66, 62, 58, ... 2 என்னும் கூட்டல் விருத்தியில் எல்லா உறுப்புக்களினதும் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க

இங்கு $a = 70, l = 2, d = -4$

முதலில் விருத்தியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண வேண்டும்.

$l = a + (n-1)d$ இல் பிரதியிடுவதால்,

$$2 = 70 + (n-1) \times (-4)$$

$$2 = 70 - 4n + 4$$

$$2 - 74 = -4n$$

$$\frac{-72}{-4} = n$$

$$18 = n$$

விருத்தியில் 18 உறுப்புகள் உள்ளன. 18 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ இல் பிரதியிடுவதால்

$$S_{18} = \frac{18}{2}(70+2)$$

$$= \frac{18}{2} \times 72$$

$$= 9 \times 72$$

$$= 648$$

$\therefore$ இவ்விருத்தியின் எல்லா உறுப்புகளினதும் கூட்டுத்தொகை 648 ஆகும்.

**உதாரணம் 4**

ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் முதலாம் உறுப்பு 12 உம், இறுதி உறுப்பு 99 உம் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 1665 உம் ஆகும். விருத்தியிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும் பொது வித்தியாசத்தையும் கண்டு முதல் 15 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

இங்கு $a = 12, l = 99, S_n = 1665$

$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ இல் பிரதியிடுவதால்

$$1665 = \frac{n}{2}(12+99)$$

$$3330 = n(111)$$

$$\frac{3330}{111} = n$$

$$30 = n$$

$\therefore$ விருத்தியிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 30 ஆகும்.

இங்கு $a = 12, T_{30} = 99, n = 30$

$T_n = a + (n-1)d$ இல் பிரதியிடுவதால்

$$99 = 12 + (30-1) \times d$$

$$99 = 12 + 29 \times d$$

$$99 - 12 = 29 \times d$$

$$\frac{87}{29} = d$$

$$3 = d$$

$\therefore$ விருத்தியின் பொது வித்தியாசம் 3 ஆகும்.

தற்போது இவ்விருத்தியில் முதல் 15 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

இங்கு $n = 15, a = 12, d = 3$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\{2 \times 12 + (15-1) \times 3\}$$

$$= \frac{15}{2}\{24 + 14 \times 3\}$$

$$= \frac{15}{2}\{24 + 42\}$$

$$= \frac{15}{2}\{66\}$$

$$= 15 \times 33$$

$$S_{15} = 495$$

∴ முதல் 15 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 495 ஆகும்.

**உதாரணம் 5**

13, 11, 9, ... என்னும் கூட்டல் விருத்தியில் கூட்டுத்தொகை 40 ஆவதற்கு முதல் உறுப்பிலிருந்து எத்தனை உறுப்புகளை எடுக்க வேண்டும்.

இங்கு $a = 13,\ d = -2,\ S_n = 40$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

$$40 = \frac{n}{2}\{2 \times 13 + (n-1) \times (-2)\}$$

$$80 = n\{26 - 2n + 2\}$$

$$80 = 28n - 2n^2$$

$$2n^2 - 28n - 80 = 0$$

$$n^2 - 14n - 40 = 0$$

$$(n-10)(n-4) = 0$$

$n - 10 = 0$ அல்லது $n - 4 = 0$

$n = 10$ அல்லது $n = 4$

இங்கு $n$ இற்கு ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடிய இரண்டு தீர்வுகள் கிடைத்துள்ளன. $n = 4$ ஆகும்போது

முதல் நான்கு உறுப்புகளின்

கூட்டுத்தொகை $= 13 + 11 + 9 + 7 = 40$

$n = 10$ ஆகும்போது முதல் பத்து

உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $= 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 + (-1) + (-3) + (-5)$

$= 40$

$\therefore$ உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 4 இற்கும் 10 இற்கும் கூட்டுத்தொகை 40 ஆகும்.

**பயிற்சி** 24.3

**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து உரிய கூட்டல் விருத்திகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(i) $a = 2$ , $l = 62$ , $n = 31$

(ii) $a = 95$, $l = 10$ , $n = 12$

(iii) $a = 7\frac{1}{2}$ , $d = \frac{1}{2}$ , $n = 15$

(iv) $a = 3.25$, $d = 1.7$ $n = 21$

**2.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கூட்டல் விருத்தியினதும்

(i) 3,7, 9, ... 11 உறுப்புகளின்

(ii) –10, –9 .7, –9.4, ... 20 உறுப்புகளின்

(iii) $1, 1\frac{3}{4}, 2.5, \dots$ 17 உறுப்புகளின்

(iv) 67, 65, 63, ... 12 உறுப்புகளின்

கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

**3.** (i) 2 இற்கும் 180 இற்கும் இடையிலுள்ள ஒற்றை எண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

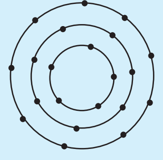
(ii) 200 இலும் குறைந்த 5 ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டு அவற்றின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(iii) 3 இற்கும் 200 இற்கும் இடையிலுள்ள 4 ஆல் வகுக்கும்போது 1 மீதியாகும் எண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(iv) 5 இற்கும் 170 இற்கும் இடையிலுள்ள மூன்றின் மடங்கல்லாத எண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

**4.** ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் முதல் நான்கு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 36 ஆகும். பதினோராம் உறுப்பின் பெறுமானம் 43 ஆகும். இவ்விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பையும் பொது வித்தியாசத்தையும் கண்டு முதல் பதினைந்து உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையையும் காண்க.

**5.** உருவில், சிறிய நிற மின்குமிழ்களைப் பயன்படுத்தி வட்டவடிவில் தயாரிக்கப்பட்ட வட்ட அலங்காரமொன்றின் முதல் மூன்று சுற்றுக்களில் மின்குமிழ்கள் பொருத்தப்பட்டுள்ள விதம் காட்டப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறு தயாரிக்கப்பட்ட ஓர் அலங்காரத்தில் இறுதிச் சுற்றில் 35 மின்குமிழ்கள் உள்ளன.



(i) அலங்காரத்தில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள சுற்றுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
(ii) எத்தனை மின்குமிழ்கள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன?
(iii) ஒரு மின்குமிழ் ரூ. 50 ஆயின் மின்குமிழ்களுக்கு செலவாகிய தொகையைக் காண்க.

**6.** $P$, $Q$ ஆகிய இரண்டு நிறுவனங்களில் ரூ. 50 000 ஐ கடனாகப் பெறும்போது கடனும் வட்டியுமாக மதாந்தம் அறவிடப்படும் முறையும் செலுத்த வேண்டிய மாதங்களின் எண்ணிக்கையும் பின்வருமாறு

நிறுவனம் $P$ : 11 000 , 10 000 , 9 000... 11 மாதங்கள்

நிறுவனம் $Q$ : 14 000 , 15 000 , 16 000... 8 மாதங்கள்

எந்நிறுவனத்தில் பணம் பெறுவது இலாபகரமானது என்பதைக் காரணங்களுடன் விளக்குக.

**7.** ஒரு தந்தை தனது மகளின் 10 வது பிறந்த நாளின்போது ஒரு வங்கியில் ரூ. 500 ஐ வைப்பிலிட்டு கணக்கொன்றைத் தொடங்கினார் ஒவ்வொரு மாதமும் அதற்கு முன்னைய மாதம் வைப்பிலிட்ட பணத்துடன் குறித்த ஒரு தொகையையும் சேர்த்து வைப்பிலிடுகின்றார். தனது மகளின் 18 ஆவது பிறந்த நாளின்போது வட்டி இல்லாத கணக்கில் வைப்பிலிட்ட தொகை ரூ. 504 000 ஆவதற்கு அவர் ஒவ்வாரு மாதமும் முன்னைய மாதம் வைப்பிலிட்ட தொகையிலும் எவ்வளவு பணம் கூடுதலாக வைப்பிலிட வேண்டும்.

**8.** ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் $n$ ஆம் உறுப்பு $T_n = 63 - 2n$ ஆகும்போது,
(i) முதல் நான்கு உறுப்புகளையும் எழுதுக.
(ii) முதல் இருபத்தியொரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.
(iii) இருபத்தியோராம் உறுப்பின் பெறுமானம் காண்க.
(iv) முதலாம் உறுப்பிலிருந்து எத்தனை உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 336 ஆகும்.

**9.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் குறிப்பிட்டுள்ள கூட்டுத்தொகையைப் பெற்றுக்கொள்வதற்கு தேவையான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) $a = 7$, $l = 10$ ஆகும்போது $s_n = 34$ ஆவதற்குத் தேவையான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(ii) $a = 63$, $d = 3$ ஆகும்போது $s_n = 345$ ஆவதற்குத் தேவையான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

**பொழிப்பு**

- கூட்டல் விருத்தியொன்றின் பொது வித்தியாசம் $d = T_n - T_{n-1}$ இனால் தரப்படும்.
- முதல் உறுப்பு $a$ ஆகவும் பொதுவித்தியாசம் $d$ ஆகவும் உள்ள கூட்டல் விருத்தியொன்றின் $n$ ஆம் உறுப்பான $T_n$ ஆனது $T_n = a + (n-1)d$ என்னும் கோவையினால் தரப்படும்.
- கூட்டல் விருத்தியொன்றின் முதல் உறுப்பும் ($a$ உம் ) கடைசி உறுப்பும் ($l$ உம் ) தரப்படும்போது உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $S_n$ ஆனது $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ இனாலும்

  கூட்டல் விருத்தியொன்றின் முதலுறுப்பு $a$ உம் பொது வித்தியாசம் $d$ உம் தரப்படும்போது உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $S_n$ ஆனது $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$ இனாலும் தரப்படும்.

**பலவினப் பயிற்சி**

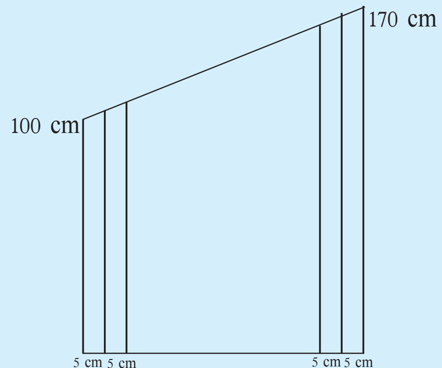
**1.** குறித்த ஒரு விற்பனை நிலையத்தில் ஓர் இறாக்கையில் சவர்க்காரக் கட்டியொன்றின் அகலப்பக்கம் நிலைகுத்தாக நிற்குமாறு கிழேயுள்ள நிரையில் 24 சவர்க்காரக்கட்டிகளும் அதற்கு மேலேயுள்ள நிரையில் 21 சவர்க்காரக் கட்டிகளும் அதற்கு மேலேயுள்ள நிரையில் 18 சவர்காரக்கட்டிகளும் என்ற ஒழுங்கில் அடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) 8 நிரைகளில் அடுக்கப்பட்டுள்ள சவர்க்காரக்கட்டிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) இறாக்கையில் மேலேயுள்ள நிரையில் 3 மாத்திரம் உள்ளதாயின் அடுக்கப்பட்டுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கையையும் சவர்க்காரக்கட்டிகளின் மொத்த எண்ணிக்கையையும் காண்க.

(iii) ஒரு சவர்க்காரக்கட்டியின் அகலம் 5 cm ஆயின் மேலே குறிபிடப்பட்டவாறு சவர்காரக்கட்டிகளை அடுக்குவதற்கு இறாக்கையில் இரண்டு தட்டுகளுக்கிடையில் இருக்க வேண்டிய மிகக் குறைந்த உயரத்தைக் கணிக்க.

**2.** உருவில் குறித்தவாறு விவசாயக் காணிக்கு பயன்படுத்துவதற்காக மரக்கீலங்கினால் தயாரிக்கப்பட்ட இரண்டு பக்கங்களும் திறக்கக்கூடிய ஒரு படலையின் ஒரு பக்கத்தின் பருமட்டானப் படம் தரப்பட்டுள்ளது. சகல மரக்கீலங்களும் 5 cm அகலத்தையுடையவனவாகும்.



சிறிய மரக்கீலத்தின் உயரம் 100 cm ஆவதுடன் அடுத்த கீலத்தின் உயரம் முன்னைய கீலத்தின் உயரத்திலும் 5 cm இனால் கூடியதாக மரக்கீலங்கள் ஒழுங்கமைக்கப்பட்டுள்ளன. பெரிய மரக்கீலத்தின் உயரம் 170 cm ஆகும்.

(i) படலையின் ஒரு பக்கத்திற்குப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள மரக்கீலங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) படலையின் அகலத்தின் மிகக் குறைந்த பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) இங்கு முழுப் படலையையும் தயாரிப்பதற்குப் பயன்படுத்தியுள்ள மரக்கீலங்களின் மொத்த நீளத்தைக் காண்க.

(iv) 30 cm நீளமுடைய மரக்கீலமொன்று ரூ. 50 ஆயின் படலையின் இரண்டு பக்கங்களையும் தயாரிப்பதற்குத் தேவையான மரக்கீலங்களுக்கான செலவைக் காண்க.

**3.** ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுதொகை. $S_n = n^2 - 8n$ ஆகும்.

(i) விருத்தியில் முதல் நான்கு உறுப்புகளின் பெறுமானங்களை எழுதுக.

(ii) 31 இவ்விருத்தியின் எத்தனையாம் உறுப்பாகும்?

(iii) விருத்தியின் எத்தனை உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்?

(iv) முதல் உறுப்பிலிருந்து எத்தனை உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 180 ஆகும்?

**4.** ஒரு சஞ்சிகையில் 3, 5, 7, ... என்ற பக்கங்கள் விசேட இளஞ் சிவப்பு வர்ணத்தினால் அச்சிடப்பட்டுள்ளன. கார்த்திக் முதலாவது தினத்தில் 5 பக்கங்களையும் பின்னர் ஒவ்வொரு தினமும் முன்னயதை விட 3 பக்கங்கள் கூடுதலாகவும் வாசித்தான்.

(i) ஐந்தாம் நாளின் இறுதியில் அவன் வாசித்துள்ள பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) ஏழாம் நாளின் இறுதியில் அவன் வாசித்து முடிக்கும் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(iii) 10 தினங்களில் சஞ்சிகையை முற்றாக வாசித்து முடிப்பானாயின் சஞ்சி கையில் அச்சிடப்பட்டுள்ள பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(iv) இச்சஞ்சிகையில் கூடியது எத்தனை இளஞ் சிவப்பு வர்ணப் பக்கங்கள் உள்ளடக்கப்பட்டுள்ளன.

(v) 6 ஆம் நாளின் இறுதியில் வாசிப்பை முடிப்பது ஒரு வர்ணப் பக்கத்தில் என அவன் கூறுகின்றான். இக்கூற்றின் செவ்வைத் தன்மை பற்றி விளக்குக.

# 25 அட்சர கணிதச் சமனிலிகள்

**இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,**

- சமனிலிகளைத் தீர்க்கவும் தீர்வுகளை ஓர் எண் கோட்டின்மீது குறிப்பதற்கும்
- சமனிலிகளை ஓர் ஆள்கூற்றுத்தளத்தில் குறிப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

சமனிலிகள் தொடர்பாக முன்னர் கற்ற விடயங்களைக் கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்கள் மூலம் மீண்டும் நினைவுகூர்வோம்.

**உதாரணம்** 1

$x + 20 > 50$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து

(i) $x$ எடுக்கக்கூடிய முழுவெண் (நிறைவெண்) பெறுமானத் தொடையை எழுதுக.

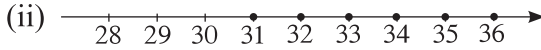
(ii) $x$ எடுக்கக்கூடிய முழுவெண் பெறுமானங்களை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

$x + 20 > 50$

$x > 50 - 20$

$x > 30$

(i) $\{31, 32, 33, 34, ....\}$

(ii) 


**உதாரணம்** 2

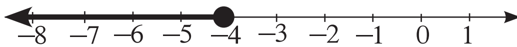
$-3x \geq 12$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்க்க.

$x$ எடுக்கக்கூடிய சகல பெறுமானங்களையும் ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

$-3x \geq 12$ (சமனிலியொன்றை மறையெண்ணால் வகுக்கும்போது குறியீடு மாறும்.)

$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{12}{-3}$

$x \leq -4$



**மீட்டற் பயிற்சி**

**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள சமனிலிகளைத் திருப்திசெய்யும் $x$ இன் பெறுமானங்களில் ஒரு பெறுமானத்தை அடைப்பினுள்ளே உள்ளவற்றிலிருந்து தெரிந்து அதன் கீழ்க் கோடிடுக.

(i) $x+3>7 \ (4,7)$  (ii) $x-3<2 \ (1,6)$  (iii) $3x>7 \ \left(2.3,\frac{8}{3}\right)$

(iv) $-2x<8 \ (-5,3)$  (v) $5-x>6 \ (12,-2)$

**2.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்க்க.

(i) $x+4>11$  (ii) $y+3\geq 0$  (iii) $p-5<2$

(iv) $p-3>-1$  (v) $a+5\leq 1$  (vi) $5y<12$

(vii) $-2x\geq 10$  (viii) $-3y<-9$  (ix) $\frac{-2x}{3}>6$

**3.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்த்து தீர்வை ஓர் எண்கோட்டின் மீது குறிக்க.

(i) $x+3\geq 1$  (ii) $y-4<-1$  (iii) $3x>-3$

(iv) $\frac{x}{2}\leq 0$  (v) $-5y>10$  (vi) $-4x\geq 12$

**4.** (i) $x+1>-2$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து $x$ எடுக்கக்கூடிய மிகச் சிறிய நிறைவெண் பெறுமானத்தை எழுதுக.

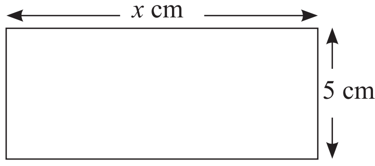
(ii) $-3y>15$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து $y$ எடுக்கக்கூடிய மிகப் பெரிய நிறைவெண் பெறுமானத்தை எழுதுக.

**5.** $x+3>1$, $2x\leq 12$ ஆகிய சமனிலிகளைத் தீர்த்து இரண்டு சமனிலிகளையும் திருப்திசெய்யும் நிறைவெண் தீர்வுகளை ஓர் எண்கோட்டின் மீது குறிக்க.

## 25.1 $ax+b \gtrless c$ வடிவிலான சமனிலிகள்

**உதாரணம்** 1

30 cm நீளமுள்ள ஒரு கம்பியிலிருந்து உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது போல 5 cm அகலமுடைய ஒரு செவ்வக வடிவிலான ஒரு மாதிரியைச் செய்த காசிம் சிறிய கம்பித்துண்டொன்றை மீதப்படுத்திக் கொண்டான்.




செவ்வகத்தின் நீளத்தை $x$ எனக் கொண்டால் செவ்வக வடிவ மாதிரியின் சுற்றளவுக்கான $x$ இலான சமனிலி $2x + 10 < 30$ இன் மூலம் பெறப்படும். $x > 5$ ஆயின் $x$ எடுக்கக்கூடிய முழுவெண் தீர்வுத் தொடையை எழுதுக. $x$ இற்கு இருக்கக்கூடிய சகல தீர்வுத் தொடைகளையும் ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

$$2x + 10 < 30$$
$$2x + 10 - 10 < 30 - 10$$
$$2x < 20$$
$$\frac{2x}{2} < \frac{20}{2}$$
$$x < 10$$




(நீளம் எப்பொழுதும் அகலத்திலும் பெரியது என்பதால் $x > 5$ ஆக வேண்டும்.)

**உதாரணம் 2**

$3 - 2x \leq 9$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்க்க.
மேலே $x$ எடுக்கக்கூடிய சகல தீர்வுகளையும் ஓர் எண் கோட்டில் குறிக்க.

$$3 - 2x \leq 9$$
$$\not{3} - 2x - \not{3} \leq 9 - 3$$
$$-2x \leq 6$$
$$\frac{-2x}{-2} \geq \frac{6}{-2}$$
$$x \geq -3$$




**பயிற்சி 25.1**

**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்க்க.

(i) $4x + 1 > 5$ (ii) $5x - 3 < 7$ (iii) $3 + 2p \geq 1$ (iv) $7x + 9 < -5$

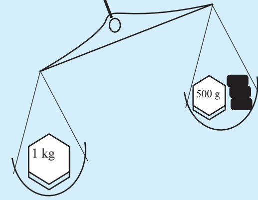
(v) $-2y - 5 > 1$ (vi) $3 - 4x \geq 3$ (vii) $8 - 4y < 0$ (viii) $2(3 - x) > 10$

**2.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்த்து நிறைவெண் தீர்வுத் தொடையை எழுதுக.

**a.** $5x+1>-4$ **b.** $3y-1\geq 2$ **c.** $-2p-4<0$ **d.** $7-4p>3$

**3.** 3 மாம்பழங்களையும் 2 தோடம்பழங்களையும் வாங்குவதற்கு ரூ. 100 போதுமானது. ஒரு மாம்பழத்தின் விலையை ரூ. 20 எனவும் ஒரு தோடம்பழத்தின் விலையை ரூ. $y$ எனவும் கொண்டால் $y$ இலான சமனிலியை $60+2y\leq 100$ என எழுதலாம். இச்சமனிலியைத் தீர்த்து ஒரு தோடம்பழத்தின் விலையாக இருக்ககூடிய அதிகூடிய முழுவெண் விலையைக் காண்க.

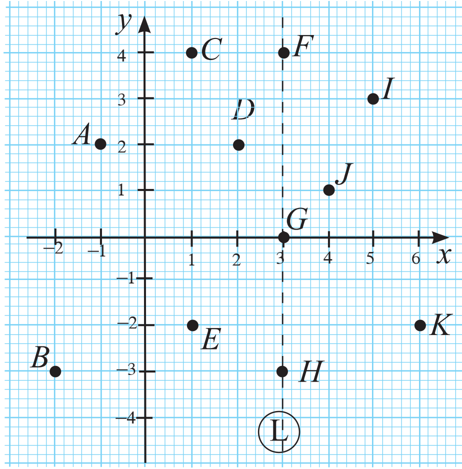
**4.** ஒரு தராசின் ஒரு பக்கத் தட்டில் 1 kg படிக்கல்லை வைத்த சாந்தன் மற்றைய தட்டில் 500g படிக்கல்லையும் ஒரே வகையைச் சார்ந்த 3 சவர்க்காரக்கட்டிகளையும் வைத்தான். அப்போது 1 kg படிக்கல்லைக் கொண்ட தட்டு கீழ் நோக்கிச் செல்வது அவதானிக்கப்பட்டது. ஒரு சவர்க்காரக்கட்டியின் நிறை $p$g எனக் கொண்டால் $p$ இலான சமனிலியை $1000>500+3p$ என எழுதலாம். ஒரு சவர்க்காரக் கட்டியின் நிறையாக இருக்கக்கூடிய அதிகூடிய முழுவெண் பெறுமானத்தைக் காண்க.




## 25.2 $y \gtrless a$ , $x \gtrless b$ வடிவிலான சமனிலிகள் மூலம் காட்டப்படும் பிரதேசங்கள்

### $y$ அச்சுக்கு சமாந்தரமான ஒரு கோட்டின் மூலம் வேறுபடுத்தப்படும் பிரதேசங்கள்

உருவில் ஆள்கூற்றுத் தளத்தின் மீது *A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K* ஆகிய புள்ளிகளும் $y$ அச்சுக்குச் சமாந்தரமாக (*L*) என்ற கோடும் காட்டப்பட்டுள்ளன.




கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணை, அவற்றுக்குரிய பண்புகள் என்பன பற்றிக் கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

| கோடு (L) இன் மீதுள்ள புள்ளிகள் | $x$ ஆள்கூறு | $y$ ஆள்கூறு |
|---|---|---|
| $F$ | 3 | 4 |
| $G$ | 3 | 0 |
| $H$ | 3 | –3 |

- கோடு (L) இன் மீதுள்ள புள்ளிகளின் $x$ ஆள்கூறு 3 இற்குச் சமனாகும்.
- ∴ கோடு (L) இன் சமன்பாடு $x = 3$ எனப் பெயரிடப்படும்.
- கோடு $x = 3$ இன் மீதுள்ள எந்தவொரு புள்ளியினதும் $x$ ஆள்கூறு 3 இற்குச் சமனாகும்.

| கோடு (L) இற்கு வலப்பக்கத்திலுள்ள புள்ளிகள் | $x$ ஆள்கூறு | $y$ ஆள்கூறு |
|---|---|---|
| $I$ | 5 | 3 |
| $J$ | 4 | 1 |
| $K$ | 6 | –2 |

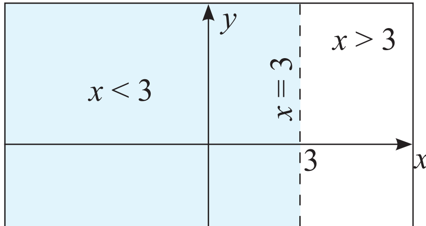
- கோடு (L) இற்கு வலப் பக்கத்திலுள்ள புள்ளிகளின் $x$ ஆள்கூறு 3 இலும் கூடிய பெறுமானங்களாகும்.
- ∴ கோடு (L) இற்கு வலப் பக்கத்திலுள்ள பிரதேசம் $x > 3$ எனப் பெயரிடப்படும்.
- $x > 3$ என்ற பிரதேசத்திலுள்ள எந்தவொரு புள்ளியினதும் $x$ ஆள்கூறு 3 இலும் பெரிய பெறுமானமாகும்.

| கோடு $(L)$ இற்கு இடப் பக்கத்திலுள்ள புள்ளிகள் | $x$ ஆள்கூறு | $y$ ஆள்கூறு |
|---|---|---|
| $A$ | $-1$ | $2$ |
| $B$ | $-2$ | $-3$ |
| $C$ | $1$ | $4$ |
| $D$ | $2$ | $2$ |
| $E$ | $1$ | $-2$ |

- கோடு $(L)$ இற்கு இடப் பக்கத்திலுள்ள புள்ளிகளின் $x$ ஆள்கூறு 3 இலும் குறைந்த பெறுமானங்களாகும்.
- $\therefore$ கோடு $(L)$ இற்கு இடப் பக்கத்திலுள்ள பிரதேசம் $x < 3$ எனப் பெயரிடப்படும்.
- $x < 3$ என்ற பிரதேசத்திலுள்ள எந்தவொரு புள்ளியினதும் $x$ ஆள்கூறு 3 இலும் சிறிய பெறுமானமாகும்.

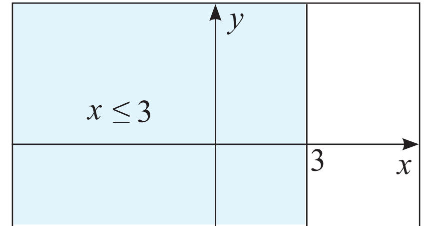
மேலேயுள்ள உதாரணத்தில் தரப்பட்டுள்ள ஆள்கூற்றுத்தளம் $x = 3$ என்ற கோட்டினால் $x < 3$, $x = 3$ , $x > 3$ என்ற உறுதியான மூன்று பிரதேசங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன என்பது தெளிவாகும். இனி, இப்பிரதேசங்களை ஓர் ஆள்கூற்றுத்தளத்தின்மீது குறிக்கும் முறை பற்றி ஆராய்வோம்.

$x < 3$ பிரதேசம்.




- இங்கு கோடு $x = 3$ ஆனது புள்ளிக் கோட்டினால் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதன்மூலம் $x = 3$ என்னும் புள்ளி $x < 3$ என்ற பிரதேசத்துக்குரியதல்ல என்பது கருதப்படுகின்றது.

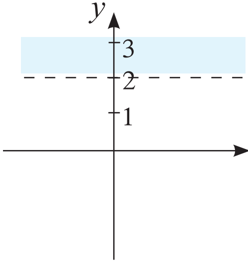
$x \leq 3$ பிரதேசம்.



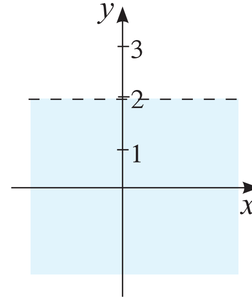

- கோடு $x = 3$ ஆனது தடிப்பான கோட்டினால் காட்டப்பட்டுள்ளது. நிழற்றப்பட்ட பிரதேசத்திற்கு $x < 3$ , $x = 3$ ஆகிய இரண்டு பிரதேசங்களும் உரியனவாகும். என்பது கருதப்படுகின்றது. எனவே இப்பிரதேசம் $x \leq 3$ எனப் பெயரிடப்படும்.

ஓர் ஆள்கூற்று தளத்தின்மீது பிரதேசங்களைக் காட்டுவதற்கான மேலும் சில உதாரணங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

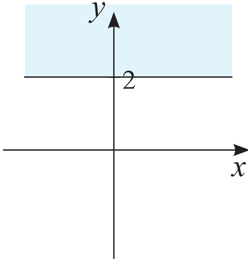
$y > 2$



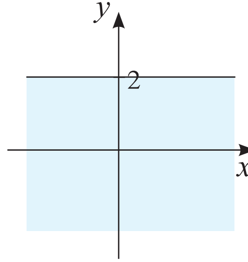

$y < 2$




$y \geq 2$




$y \leq 2$




**பயிற்சி 25.2**

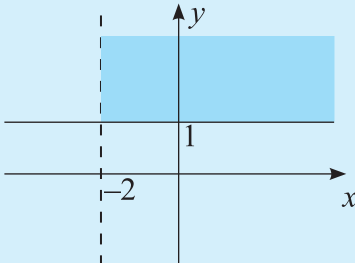
1. $x < -2$ என்னும் பிரதேசத்தில் உள்ள மூன்று ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

2. $x > -1$ என்னும் பிரதேசத்தில் உள்ள மூன்று ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

3. $x > 1, y < -2$ ஆகிய இரண்டு பிரதேசங்களுக்குரிய 3 புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

4. கீழே தரப்பட்டுள்ளவற்றில் எப்புள்ளி $x \leq -2$ , $y > 0$ ஆகிய இரண்டு பிரதேசங்களுக்குமுரியது.
   $A = (-3, 0)$ $B = (-2, 1)$ $C = (-1, 4)$

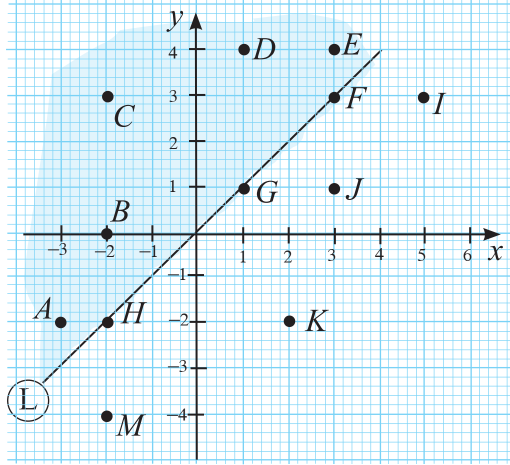
5. நிழற்றப்பட்ட பிரதேசத்துக்குரிய இரண்டு சமனிலிகளை எழுதுக.




6. $x > 1, x \leq 3, y \leq 2, y > -1$ ஆகிய நான்கு சமனிலிகளையும் திருப்திசெய்யும் பிரதேசத்தை ஓர் ஆள்கூற்றுத்தளத்தில் நிழற்றிக் காட்டுக.

## 25.3 $y \gtrless x$ வடிவிலான சமனிலிகள்

உருவிள்ள ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, M$ ஆகிய புள்ளிகளும் கோடு (L) உம் காட்டப்பட்டுள்ளன.




| கோடு (L) இன் மீதுள்ள புள்ளிகள் | $x$ ஆள்கூறு | $y$ ஆள்கூறு |
|---|---|---|
| $F$ | 3 | 3 |
| $G$ | 1 | 1 |
| $H$ | $-2$ | $-2$ |

- கோடு (L) இன் மீது அமைந்த புள்ளிகளின் $y$ ஆள்கூறு $x$ ஆள்கூறுக்குச் சமனாகும்.
- $\therefore$ கோடு (L) ஆனது $y = x$ எனப் பெயரிடப்படும்.

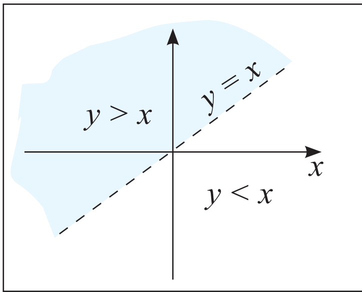
| நிழற்றப்பட்ட பிரதேசத்துக்குரிய புள்ளிகள் | $x$ ஆள்கூறு | $y$ ஆள்கூறு |
|---|---|---|
| $A$ | $-3$ | $-2$ |
| $B$ | $-2$ | 0 |
| $C$ | $-2$ | 3 |
| $D$ | 1 | 4 |
| $E$ | 3 | 4 |

- நிழற்றப்பட்ட பிரதேசத்துக்குரிய புள்ளிகளின் $y$ ஆள்கூறு $x$ ஆள்கூறிலும் பெரிதாகும்.
- $\therefore$ நிழற்றப்பட்ட பிரதேசம் $y > x$ எனப் பெயரிடப்படும்.

| நிழற்றப்படாத பிரதேசத்துக்குரிய புள்ளிகள் | $x$ ஆள்கூறு | $y$ ஆள்கூறு |
|---|---|---|
| $I$ | 5 | 3 |
| $J$ | 3 | 1 |
| $K$ | 2 | –2 |
| $M$ | –2 | –4 |

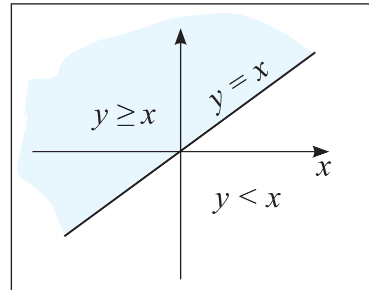
- நிழற்றப்பட்ட பிரதேசத்துக்குரிய புள்ளிகளின் $y$ ஆள்கூறு $x$ ஆள்கூறிலும் சிறிதாகும்.
- $\therefore$ நிழற்றப்படாத பிரதேசம் $y < x$ எனப் பெயரிடப்படும்

(i) $y > x$



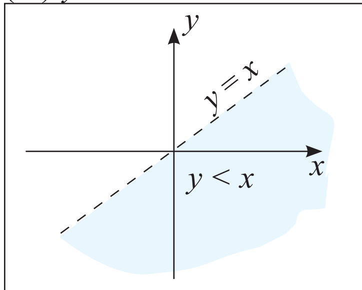

$y = x$ ஆனது புள்ளிக் கோட்டின் மூலம் காட்டப்பட்டுள்ளதால் நிழற்றப்பட்ட பிரதேசமாகிய $y > x$ இற்கு $y = x$ இன் புள்ளிகள் உரியன அல்ல என்பது கருதப்படுகின்றது.

(ii) $y \geq x$

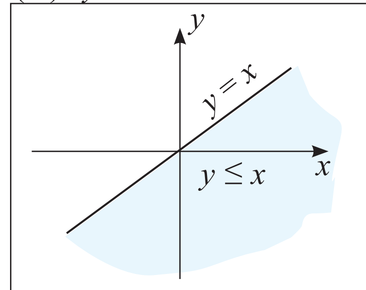



$y = x$ ஆனது தடிப்பான கோட்டின் மூலம் காட்டப்பட்டுள்ளதால் நிழற்றப் பட்ட பிரதேசமாகிய $y \geq x$ இற்கு $y = x$ உரியன என்பது கருதப்படு கின்றது.

(iii) $y < x$




(iv) $y \leq x$



**பயிற்சி 25.3**

1. $y = x$ என்னும் பிரதேசத்துக்குரிய 3 புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகளில் $y \geq x$ என்னும் பிரதேசத்துக்குரியதல்லாத புள்ளி யாது?
$A = (5, 5)$, $B= (-3, -2)$, $C = (0, -1)$

3. $y < -2$ , $y > x$ ஆகிய இரண்டு சமனிலிகளையும் திருப்தி செய்யும் 3 புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

4. $x \geq 0$ , $y > x$ ஆகிய இரண்டு பிரதேசங்களையும் ஆள்கூற்றுத் தளமொன்றில் நிழற்றுக.

5. ஓர் ஆள்கூற்றுத்தளத்தில் $x < 3, y > 0$ , $y < x$ ஆகிய மூன்று சமனிலிகளுக்குரிய பிரதேசங்களையும் திருப்தி செய்யும் 3 புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

# 26 மீடிறன் பரம்பல்

**இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,**

- கூட்டமாக்கிய தரவுகளின் இடையைக் காண்பதற்குத் தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

## கூட்டமாக்கிய தரவுகள்

ஒரு வீடமைப்புத்திட்டத்தில் வதியும் குடும்பங்கள் பற்றி மேற்கொள்ளப்பட்ட ஒரு கணீப்பீட்டின்போது குடும்பங்களில் இருக்கும் உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கைகள் தொடர்பாகச் சேகரிக்கப்பட்ட தரவுகள் கீழே காணப்படுகின்றன.

4, 5, 2, 7, 4, 3, 6, 8, 9, 5, 5, 4, 4, 6, 3
8, 4, 5, 6, 4, 6, 5, 5, 4, 2, 4, 5, 3, 5, 7
5, 5, 7, 5, 3, 5, 7, 5, 4, 5, 6, 4, 4, 6, 4

இத்தரவுகளின் கூடிய பெறுமானம் 9 ஆக இருக்கும் அதே வேளை குறைந்த பெறுமானம் 2 ஆகும். தரவுகளின் கூடிய பெறுமானத்திலிருந்து குறைந்த பெறுமானத்தைக் கழிக்கும்போது கிடைக்கும் பெறுமானம் **வீச்சு** எனப்படும்.

தரப்பட்டுள்ள தரவுகளின் வீச்சு $= 9 - 2$
$= 7$

தரவுகளின் வீச்சு ஒரு குறைந்த பெறுமானத்தை எடுக்கும் இத்தகைய தகவல்களைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம். அத்தகைய ஓர் அட்டவணை **மீடிறன் பரம்பல்** எனப்படும்.

| ஒரு வீட்டில் இருக்கும் உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை | மீடிறன் (குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை) |
|---|---|
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | 12 |
| 5 | 14 |
| 6 | 6 |
| 7 | 4 |
| 8 | 2 |
| 9 | 1 |

வேறோர் உதாரணத்தைக் கருதுவோம்

ஒரு பாடசாலையின் தரம் 10 மாணவர்கள் கணிதபாடப் பரீட்சையில் பெற்ற புள்ளிகள் தொடர்பான தரவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

25, 12, 65, 40, 32, 84, 52, 65, 32, 09
70, 53, 67, 56, 65, 48, 20, 17, 08, 43
52, 68, 73, 25, 39, 42, 61, 22, 37, 45
36, 65, 24, 53, 46, 18, 39, 54, 26, 35
27, 94, 59, 87, 72

இச்சந்தர்ப்பத்தில் தகவல்களின் பெரிய பெறுமானம் 94 ஆக இருக்கும் அதே வேளை சிறிய பெறுமானம் 8 ஆகும்.

அதற்கேற்பத் தரவுகளின் வீச்சு = 94 − 8
= 86

தரவுகளின் வீச்சு பெரிதாகையால் ஒவ்வொரு பெறுமானத்தின் கீழும் அட்டவணைப்படுத்தும்போது ஒரு மிகவும் நீளமான அட்டவணை கிடைக்கும். ஆகவே, தரவுகளின் வீச்சு பெரிதாக இருக்கும் சந்தர்ப்பங்களில் அத்தரவுகளைக் கூட்டங்களாகப் பிரித்து வகைகுறித்தல் எளிதாகும். அவ்வாறு அவை கூட்டங்களாக (வகுப்பாயிடைகளாக) வேறுபடுத்தப்படும் விதத்தைப் பார்ப்போம்.

மேற்குறித்த தரவுகளைக் கொண்டு வகுப்பாயிடைகளாகப் பிரித்துத் தயாரித்த ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே காணப்படுகின்றது.

| **வகுப்பாயிடை** | **மீடிறன்** |
|---|---|
| 8 - 16 | 3 |
| 17 - 25 | 7 |
| 26 - 34 | 4 |
| 35 - 43 | 8 |
| 44 - 52 | 5 |
| 53 - 61 | 6 |
| 62 - 70 | 7 |
| 71 - 79 | 2 |
| 80 - 88 | 2 |
| 89 - 97 | 1 |

இங்கு வகுப்பாயிடை 8 - 16 இன் மீடிறன் 3 என்பதன் கருத்து 8 இற்கும் 16 இற்குமிடையே அப்பெறுமானங்களும் உட்பட 3 தரவுகள் உள்ளன என்பதாகும். இச்செயற்திட்டத்தின் கூடுதலான மீடிறன் 8 ஆகும். அது வகுப்பாயிடை 35 - 43 இற்குரியது. அது **ஆகார வகுப்பு** எனப்படும்.

இத்தகைய வகுப்பாயிடை உள்ள மீடிறன் பரம்பல் **கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல்** எனப்படும்.

கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலைத் தயாரிக்கும்போது ஏறத்தாழ 10 வகுப்பாயிடைகள் கிடைக்குமாறு வகுப்பாயிடைகள் வேறுபடுத்தப்படும்.

இங்கு **வகுப்பாயிடையின் பருமன்** 9 ஆகும். இங்கு எல்லா வகுப்பா யிடைகளினதும் பருமன்கள் சமம் என்பதைக் கவனிக்க.

இங்கு முதல் வகுப்பாயிடை 8 - 16 உம் அடுத்த வகுப்பாயிடை 17 - 25 உம் ஆகும். தரவுகளினால் புள்ளிகள் காட்டப்படுகின்றன. 16 இற்கும் 17 இற்குமிடையே புள்ளிகள் இல்லை ஆகையால் முதல் வகுப்பாயிடை 16 இல் முடிவடையும்போது அடுத்த வகுப்பாயிடை 17 இல் தொடங்குமாறு தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.
இத்தகைய ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலின் இடை காணப்படும் விதத்தை இப்போது பார்ப்போம். அதற்காகத் தொடக்கத்திலேயே ஒவ்வொரு வகுப்பாயிடையின் நடுப் பெறுமானத்தையும் காணுதல் வேண்டும்.

## 26.1 வகுப்பாயிடையின் நடுப்பெறுமானம்

மேற்குறித்த உதாரணத்தில் வகுப்பாயிடை 8 - 16 இன் நடுப்பெறுமானத்தைக் காண்போம்.

அது $\frac{8+16}{2} = 12$ எனக் காணலாம்.

இதற்கேற்ப வகுப்பாயிடை 8 - 16 இன் நடுப் பெறுமானம் 12 ஆகும்.

வகுப்பாயிடையின் கீழ் எல்லையையும் மேல் எல்லையையும் கூட்டி 2 இனால் வகுப்பதன் முலம் வகுப்பாயிடையின் நடுப்பெறுமானம் பெறப்படுகின்றது. இவ்வாறு ஒவ்வொரு வகுப்பாயிடையினதும் நடுப்பெறுமானத்தைக் காணலாம்.

கணிப்புகளில் ஒரு வகுப்பாயிடையை வகைகுறிக்கும் ஒரு பெறுமானமாக அதன் நடுப்பெறுமானம் கருதப்படும்.

| வகுப்பாயிடை | நடுப்பெறுமானம் | மீடிறன் |
|---|---|---|
| 8 - 16 | 12 | 3 |
| 17 - 25 | 21 | 7 |
| 26 - 34 | 30 | 4 |
| 35 - 43 | 39 | 8 |
| 44 - 52 | 48 | 5 |
| 53 - 61 | 57 | 6 |
| 62 - 70 | 66 | 7 |
| 71 - 79 | 75 | 2 |
| 80 - 88 | 84 | 2 |
| 89 - 97 | 93 | 1 |

ஓர் அலுவலகத்தின் பணியாளர் குழுவின் வயதுகள் தொடர்பாகச் சேகரித்தத் தரவுகளைக் கொண்டு தயாரித்த ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் கீழே காணப்படுகின்றது.

| தொழிலாளர் களின் வயது (வருடங்கள்) | 20 - 25 | 25 - 30 | 30 - 35 | 35 - 40 | 40 - 45 | 45 - 50 | 50 - 55 | 55 - 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| தொழிலாளர் களின் எண்ணிக்கை | 5 | 3 | 3 | 5 | 4 | 2 | 2 | 1 |

தரம் 10 இன் மாணவர்களின் புள்ளிகள் இடம்பெறும் மேலே கற்ற உதாரணத்தில் வகுப்பாயிடைகள் வேறுபடுத்தப்பட்டிருந்த விதத்தை நினைவுகூர்வோம். முதல் வகுப்பாயிடை 8 - 16 எனவும் அடுத்த வகுப்பாயிடை 17 - 25 எனவும் வேறுபடுத்தப்பட்டிருந்தன. அதில் 16 இற்கும் 17 இற்குமிடையே புள்ளிகள் இல்லாமையால் அவ்வாறு வேறுபடுத்தல் உகந்ததாக இருந்தது. எனினும், இவ்வுதாரணத்தில் முதல் வகுப்பாயிடை 20 - 25 எனவும் அடுத்த வகுப்பாயிடை 25 - 30 எனவும் வேறாக்கப்பட்டுள்ளது. முதல் வகுப்பாயிடை முடிவடையும் தரவாகிய 25 இல் அடுத்த வகுப்பாயிடை ஆரம்பித்துள்ளது. இதற்குக் காரணம் இங்கு வயது தொடர்பான தரவுகள் சேகரிக்கப்பட்டுள்ளமையாகும். 25 இற்கும் 26 இற்கும் இடைப்பட்டுள்ள வயதுள்ளவர்கள் இருக்கலாம் ஆகையால், ஒரு வகுப்பாயிடை முடிவடையும் தரவிலேயே அடுத்த வகுப்பாயிடை ஆரம்பித்தல் வேண்டும்.

வகுப்பாயிடை 20 - 25 இற்கு 20 அல்லது 20 இற்கு மேற்பட்ட, ஆனால் 25 இற்குக் குறைந்த வயதுக் கூட்டம் உரியது. இதற்கேற்ப 25 வயது வகுப்பாயிடை 25 - 30 இற்கு உரியது.

---

குறிப்பு : தரவுகளை இரு வகையாக வகைப்படுத்தலாம். முழுவெண் பெறுமானங்களை மாத்திரம் கொண்டிருக்கும் தரவுகள் **பின்னகமான** தரவுகள் எனவும் அவ்வாறு முழுவெண் பெறுமானங்களை மாத்திரமன்றி யாதாயினும் ஒரு வீச்சினுள் எந்தவொரு பெறுமானத்தையும் எடுக்கத்தக்க தரவுகள் **தொடரான** தரவுகள் எனவும் வகைப்படுத்தப்படும்.

---

இதற்கேற்பத் தொழிலாளர்களின் வயதுகள் தொடர்பான கூட்டமாக்கிய தரவு மீடிறன் பரம்பல் நடுப்பெறுமான நிரலுடனும் கீழே காணப்படுகின்றது.

| வகுப்பாயிடை | நடுப் பெறுமானம் | மீடிறன் |
|---|---|---|
| 20 - 25 | 22.5 | 5 |
| 25 - 30 | 27.5 | 3 |
| 30 - 35 | 32.5 | 3 |
| 35 - 40 | 37.5 | 5 |
| 40 - 45 | 42.5 | 4 |
| 45 - 50 | 47.5 | 2 |
| 50 - 55 | 52.5 | 2 |
| 55 - 60 | 57.5 | 1 |

**பயிற்சி 26.1**

**1.** ஒரு பாடசாலையில் தரம் 10 இன் மாணவர் கூட்டம் ஒரு தவணைப் பரீட்சையில் பெற்ற புள்ளிகள் கூட்டமாக்கிப் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

| புள்ளிகள் | நடுப் பெறுமானம் | மீடிறன் |
|---|---|---|
| 11 - 20 | 15.5 | 1 |
| 21 - 30 | | 7 |
| 31 - 40 | | 9 |
| 41 - 50 | | 8 |
| 51 - 60 | | 10 |
| 61 - 70 | | 7 |
| 71 - 80 | | 4 |
| 81 - 90 | | 2 |
| 91 - 100 | | 2 |

(i) நடுப் பெறுமான நிரலைப் பூரணப்படுத்துக.
(ii) வகுப்பாயிடையின் பருமன் யாது?
(iii) ஆகார வகுப்பு யாது?

**2.** ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் உயரத்தைக் கிட்டிய சென்ரிமீற்றருக்கு அளந்து பெற்ற தரவுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் காணப்படுகின்றன.

| மாணவர்களின் உயரம் (cm) | நடுப் பெறுமானம் | மீடிறன் |
|---|---|---|
| 140 - 145 | | 5 |
| 145 - 150 | | 8 |
| 150 - 155 | | 15 |
| 155 - 160 | | 7 |
| 160 - 165 | | 8 |
| 165 - 170 | | 6 |

(i) அட்டவணையைப் பிரதிசெய்து நடுப் பெறுமான நிரலைப் பூரணப்படுத்துக.
(ii) அட்டவணையைக் கொண்டு வகுப்பில் 150 cm இலும் குறைந்த உயரமுள்ள பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
(iii) ஆகார வகுப்பு யாது?

**3.** ஒரு பாடசாலையிலே முதலாந் தவணையின்போது பாடசாலைக்கு வந்த பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கைகளைக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் கீழே காணப்படுகின்றது.

| பாடசாலைக்கு வந்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை | நடுப் பெறுமானம் $x$ | மீடிறன் (நாட்களின் எண்ணிக்கை) $f$ |
|---|---|---|
| 531 - 550 | | 4 |
| 551 - 570 | | 10 |
| 571 - 590 | | 21 |
| 591 - 610 | | 12 |
| 611 - 630 | | 10 |

(i) அட்டவணையைப் பிரதிசெய்து நடுப்பெறுமான நிரலைப் பூரணப் படுத்துக.
(ii) 591 இற்குக் குறைவாக மாணவர்கள் வரும் நாட்களின் எண்ணிக்கை யாது?
(iii) 570 இற்கு மேற்பட்ட மாணவர்கள் வரும் நாட்களின் எண்ணிக்கை யாது?
(iv) அத்தவணையின்போது பாடசாலை நடைபெற்ற நாட்களின் எண்ணிக்கை யாது?

**4.** மின் குமிழின் ஆயுட்காலத்தைப் பரீட்சிப்பதற்காக நடத்தப்பட்ட ஒரு பரிசோதனையிலிருந்து பெறப்பட்ட தகவல்கள் கீழே காணப்படுகின்றன.

| ஒளிர்ந்த காலம் (மணித்தியாளங்கள்) | நடுப் பெறுமானம் $x$ | குமிழ்களின் எண்ணிகை $f$ |
|---|---|---|
| 100 - 200 | | 5 |
| 200 - 300 | | 12 |
| 300 - 400 | | 25 |
| 400 - 500 | | 30 |
| 500 - 600 | | 16 |
| 600 - 700 | | 12 |

(i) அட்டவணையைப் பிரதிசெய்து நடுப் பெறுமான நிரலைப் பூரணப்படுத்துக.
(ii) 400 மணித்தியாலங்களுக்குக் குறைவாக ஒளிர்ந்த மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கை யாது?
(iii) பரிசோதனைக்காகப் பயன்படுத்திய மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கை யாது? (பயன்படுத்திய குமிழ் ஒவ்வொன்றும் 100 இற்கும் 700 இற்கும் இடைப்பட்ட மணித்தியாலங்களுக்கு ஒளிர்கின்றதெனக் கொள்க.)

## 26.2 கூட்டமாக்கிய தரவுகளின் நடுப் பெறுமானத்தைக் கொண்டு இடையைக் கணித்தல்

கூட்டமாக்கிய தரவுகளின் இடையைக் கணிக்கையில் வகுப்பாயிடையை வகைகுறிக்கும் பெறுமானமாக அதன் நடுப் பெறுமானம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. அவ்வாறு நடுப் பெறுமானத்தைப் பயன்படுத்திக் கூட்டமாக்கிய தரவுகளின் இடையைக் கணிக்கும் விதத்தைப் பார்ப்போம்.

**உதாரணம்** 1

மொத்தப் புள்ளிகள் 25 ஆகவுள்ள ஒரு கணித வினாத்தாளுக்கு 40 பிள்ளைகள் பெற்ற புள்ளிகள் பின்வரும் கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலில் காணப்படுகின்றன.

| புள்ளிகள் | 04 - 08 | 08 - 12 | 12 - 16 | 16 - 20 | 20 - 24 |
|---|---|---|---|---|---|
| மாணவர் எண்ணிக்கை | 3 | 7 | 15 | 11 | 4 |

இவ்வட்டவணையைக் கொண்டு நடுப் பெறுமானம், மீடிறன், நடுப் பெறுமானத்தினதும் மீடிறனினதும் பெருக்கம் ஆகியவற்றை நிரல்களாகக் கொண்ட ஓர் அட்டவணையை உருவாக்குவோம்.

| புள்ளி ஆயிடை | நடுப் பெறுமானம் $x$ | மீடிறன் $f$ | $fx$ |
|---|---|---|---|
| 04 - 08 | 6 | 3 | 18 |
| 08 - 12 | 10 | 7 | 70 |
| 12 - 16 | 14 | 15 | 210 |
| 16 - 20 | 18 | 11 | 198 |
| 20 - 24 | 22 | 4 | 88 |
| | | $\Sigma f = 40$ | $\Sigma fx = 584$ |

இங்கு $\Sigma f$ ஆனது பிள்ளைகளின் மொத்த எண்ணிக்கையையும் $fx$ ஆனது $f$ , $x$ ஆகியவற்றின் பெருக்கத்தையும் $\Sigma fx$ ஆனது $fx$ நிரலின் பெறுமானங்களின் கூட்டுத்தொகையையும் குறிப்பிடுகின்றன. அப்போது இடை $\dfrac{\sum fx}{\sum f}$ இனால் வரையறுக்கப்படுக்கின்றது.

அதாவது, இடை $= \dfrac{\sum fx}{\sum f}$

$$இடை = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$
$$= \frac{584}{40}$$
$$= 14.6$$

பிள்ளைகள் பெற்ற இடைப் புள்ளிகள் 14.6 ஆகும்.

**பயிற்சி 26.2**

**1.** மரக்கறிகள் சேகரிக்கப்படும் நிலையம் ஒன்றுக்கு விவசாயிகளினால் கொண்டு வரப்பட்ட மரக்கறிகளின் அளவுகள் தொடர்பாக மேற்கொள்ளப்பட்ட ஒரு கணிப்பீட்டில் ஒரு குறித்த நாளில் 40 விவசாயிகள் கொண்டு வந்த அவரையின் அளவுகள் தொடர்பாகக் கிடைத்த தரவுகளைக் கொண்டு தயாரித்த ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே காணப்படுகின்றது.

| திணிவு (kg) | 14 - 18 | 18 - 22 | 22 - 26 | 26 - 30 | 30 - 34 |
|---|---|---|---|---|---|
| விவசாயிகளின் எண்ணிக்கை | 3 | 7 | 15 | 11 | 4 |

(i) இவ்விவசாயிகள் கொண்டு வந்த அவரையின் திணிவுகளின் இடையைக் கணிக்க.

(ii) இதற்கேற்ப 10 நாட்களில் அந்நிலையத்திற்குக் கொண்டுவரப்படுமென எதிர்பார்க்கப்படும் அவரையின் திணிவு யாது?

**2.** ஆடை நிறுவனம் ஒன்றினால் ஒரு மாதத்தில் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட சட்டை களின் எண்ணிக்கைகள் பின்வரும் மீடிறன் பரம்பலில் காணப்படுகின்றன.

| சட்டைகளின் எண்ணிக்கை | 01 - 15 | 16 - 30 | 31 - 45 | 46 - 60 | 61 - 75 |
|---|---|---|---|---|---|
| நாட்களின் எண்ணிக்கை | 4 | 8 | 6 | 8 | 4 |

(i) மேற்குறித்த தகவல்களுக்கேற்ப ஒரு நாளில் உற்பத்திசெய்யப்படும் சட்டைகளின் இடை எண்ணிக்கையைக் கணிக்க.

(ii) இடைக்கேற்ப ஒரு மாதத்தில் உற்பத்திசெய்யப்படுமென எதிர்பார்க்கத்தக்க சட்டைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

**3.** ஒரு வகுப்பில் உள்ள 30 மாணவர்களின் ஒரு குறித்த மதிப்பீட்டில் பெற்ற புள்ளிகளின் பரம்பல் கீழே காணப்படுகின்றது.

| புள்ளிகள் | 1 - 10 | 11 - 20 | 21 - 30 | 31 - 40 | 41 - 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| மாணவர் எண்ணிக்கை | 2 | 9 | 13 | 4 | 2 |

(i) ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமன் யாது?
(ii) ஆகார வகுப்பு யாது?
(iii) வகுப்பின் ஒரு பிள்ளை பெற்ற புள்ளிகளின் இடையைக் காண்க.

**4.** குறித்த ஒரு கல்விக் கோட்டத்திலே சேவையில் ஈடுபட்டுள்ள ஆசிரியர்களின் வயதெல்லைகளைக் காட்டும் அட்டவணை கீழே காணப்படுகின்றது.

| வயது (வருடங்களில்) | 21 - 26 | 26 - 31 | 31 - 36 | 36 - 41 | 41 - 46 | 46 - 51 | 51 - 56 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ஆசிரியர்களின் எண்ணிக்கை | 11 | 32 | 51 | 40 | 27 | 18 | 6 |

(i) இக்கல்விக் கோட்டத்தில் சேவையில் ஈடுப்பட்டுள்ள ஆசிரியர்களின் எண்ணிக்கை யாது?
(ii) கூடுதலான ஆசிரியர்கள் எவ்வயதுக் கூட்டத்தைச் சேர்ந்தவர்கள்?
(iii) இத்தகவல்களுக்கேற்ப அக்கோட்டத்திலே சேவையில் ஈடுபடும் ஆசிரியர்களின் இடை வயதைக் கணிக்க.

**5.** ஒரு லொறியில் ஏற்றப்பட்டுள்ள மரக் குற்றிகளின் சுற்றளவைக் காண்பதன் மூலம் பெறப்படும் தகவல்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் காணப்படுகின்றன.

| மரக் குற்றிகளின் சுற்றளவு (cm) | 0 - 25 | 25 - 50 | 50 - 75 | 75 - 100 | 100 - 125 |
|---|---|---|---|---|---|
| மீடிறன் | 8 | 10 | 12 | 20 | 18 |

(i) இதன் ஆகார வகுப்பு யாது?
(ii) மேற்குறித்த தகவல்களுக்கேற்ப ஒரு லொறியில் ஏற்றப்பட்டிருந்த ஒரு மரக் குற்றியின் இடைச் சுற்றளவைக் கணிக்க.

## 26.3 எடுகொண்ட இடையைக் கொண்டு இடையைக் கணித்தல்

இடையைக் காண்பதற்குச் சில சந்தர்ப்பங்களில் தரப்படும் எண் பரம்பல்களின் தரவுகளின் நடுப் பெறுமானம் பெரிய எண்களைக் கொண்டிருக்கலாம். அத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் இதுவரை கற்ற இடையைக் காண்பதற்கான முறை ஓரளவு கடினமாக இருக்கலாம். அதற்கு மிகவும் உகந்த ஒரு முறையைப் பின்வரும் உதாரணத்தைக் கொண்டு ஆராய்வோம்.

அதாவது எடுகொண்ட இடையைக் கொண்டு இடை கணிக்கப்படும் விதத்தை முதலில் ஓர் எளிய உதாரணத்தின் மூலம் விளக்குவோம்.

**உதாரணம்** 1

ஒரு குறித்த நீர்ச் செயற்றிட்டத்தின் மூலம் நீரைப் பெறும் 70 குடும்பங்கள் ஒரு மாதத்தில் நுகர்ந்த நீர் அலகுகளின் எண்ணிக்கைகள் பற்றிய தரவுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் காணப்படுகின்றன.

| வகுப்பாயிடை | 12 - 14 | 15 - 17 | 18 - 20 | 21 - 23 | 24 - 26 | 27 - 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை | 5 | 9 | 11 | 26 | 11 | 8 |

ஒரு குடும்பம் பயன்படுத்திய நீரின் இடை அலகுகளின் எண்ணிக்கையைக் கிட்டிய முழு எண்ணிற்குக் கணிக்குக.

முதலில் ஒவ்வொரு வகுப்பாயிடையையும் வகைகுறிப்பதற்கு நடுப் பெறுமானத்தைக் காண்போம். வகுப்பாயிடை 21 - 23 இன் நடுப் பெறுமானமாகிய 22ஐ இடையாக எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது 22 ஐ எடுகொண்ட இடையாகக் கொள்வோம். இப்போது ஒவ்வொரு நடுப்பெறுமானத்திலிருந்தும் எடுகொண்ட இடையைக் கழிக்கும்போது கிடைக்கும் பெறுமானத்தைக் ( விலகல்) காண்போம்.

அதாவது **விலகல் = நடுப் பெறுமானம் − எடுகொண்ட இடை**

| வகுப்பாயிடை | நடுப்பெறுமானம் $x$ | விலகல் $d$ | மீடிறன் $f$ | $fd$ |
|---|---|---|---|---|
| 12 - 14 | 13 | −9 | 5 | −45 |
| 15 - 17 | 16 | −6 | 9 | −54 |
| 18 - 20 | 19 | −3 | 11 | −33 |
| 21 - 23 | 22 | 0 | 26 | 0 |
| 24 - 26 | 25 | 3 | 11 | 33 |
| 27 - 29 | 28 | 6 | 8 | 48 |
| | | | $\Sigma f = 70$ | $\Sigma fd = 81 - 132$<br>$= -51$ |

இங்கு $\Sigma f$ ஆனது குடும்பங்களின் மொத்த எண்ணிக்கையையும் $fd$ ஆனது எண்ணினதும் விலகலினதும் பெருக்கத்தையும் $\Sigma fd$ ஆனது அந்நிரலின் கூட்டுத்தொகையையும் குறிப்பிடுகின்றன.

| இடை = எடுகொண்ட இடை + விலகல் இடை |
|---|

எனக் கிடைக்கும்.

$$\text{இதற்கேற்ப இடை} = 22 + \left(\frac{-51}{70}\right)$$
$$= 22 - 0.728$$
$$= 21.272$$
$$\approx 21$$

எடுகொண்ட இடையாக ஆகார வகுப்பின் அல்லது இடைய வகுப்பின் நடுப் பெறுமானத்தைத் தெரிந்தெடுப்பதன் மூலம் விலகலைக் காணல் மேலும் கணித்தலை இலகுவாக்கும்.

எடுகொண்ட இடைக்காக $A$ யையும் விலகலுக்காக $d$ யையும் பயன்படுத்தும்போது எண் பரம்பலின் இடை $= A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$ எனக் கிடைக்கும்

| இடை $= A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$ |
|---|

**பயிற்சி 26.3**

**1.** ஒரு குறித்த தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சியை இரசிக்கும் 100 இரசிகர்களின் வயதுகள் பற்றிய தரவுகள் இடம்பெறும் அட்டவணை கீழே காணப்படுகின்றது.

| வயது (வருடங்கள்) | 5 - 15 | 15 - 25 | 25 - 35 | 35 - 45 | 45 - 55 | 55 - 65 | 65 - 75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| இரசிகர்களின் எண்ணிக்கை | 7 | 16 | 25 | 31 | 14 | 5 | 2 |

(i) மேற்குறித்த தகவல்களின் ஆகார வகுப்பு யாது?

(ii) இந்த இரசிகர்களில் 25 வயதிலும் பார்க்கக் குறைந்த வயதுள்ள இரசிகர்களின் எண்ணிக்கையை மொத்த எண்ணிக்கையின் சதவீதமாகக் காண்க.

(iii) வகுப்பு 35 - 45 இன் நடுப் பெறுமானத்தை எடுகொண்ட இடையாகக் கொண்டு இந்நிகழ்ச்சியை இரசிக்கும் இரசிகர் ஒருவரின் இடை வயதைக் கிட்டிய முழு எண்ணிற்குக் காண்க.

**2.** ஒரு தனியார் நிறுவனத்தின் பணியாளர் குழு ஓர் ஆண்டில் பெற்ற விடுமுறை நாட்களின் எண்ணிக்கையைக் கொண்டு பின்வரும் அட்டவணை தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

| விடுமுறை நாட்களின் எண்ணிக்கை | 0 - 6 | 6 - 12 | 12 - 18 | 18 - 24 | 24 - 30 | 30 - 36 | 36 - 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை | 5 | 15 | 20 | 11 | 8 | 6 | 5 |

(i) இப்பரம்பலின் ஆகார வகுப்பு யாது?

(ii) 6 நாட்களுக்குக் குறைவாக விடுமுறை எடுப்பவர்களுக்கு விசேட வெகுமதியைக் கொடுப்பதற்கு எதிர்பார்க்கபடுமெனின், வெகுமதியைப் பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கை தொழிலாளர்களின் மொத்த எண்ணிக்கையில் என்ன சதவீதமாகும்?

(iii) வகுப்பு 18 - 24 இன் நடுப் பெறுமானத்தை எடுகொண்ட இடையாகக் கொண்டு ஒரு தொழிலாளர் இவ்வாண்டில் பெற்றுள்ள இடை விடுமுறை நாட்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(iv) மேலே (iii) இன் விடைக்கேற்ப அந்நிறுவனம் ஓர் ஆண்டில் இழக்குமென எதிர்பார்க்கத்தக்க உழைப்பு எத்தனை மனித நாட்கள்?

**3.** தரப்படுத்துவதற்காக நடத்தப்பட்ட ஒரு பரீட்சையில் 240 மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் இடம்பெறும் ஒரு பரம்பல் கீழே காணப்படுகின்றது.

| புள்ளி வகுப்பு | 0 - 8 | 9 - 17 | 18 - 26 | 27 - 35 | 36 - 44 | 45 - 53 | 54 - 62 | 63 - 71 | 72 - 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| மாணவர் எண்ணிக்கை | 15 | 18 | 39 | 39 | 48 | 33 | 23 | 14 | 11 |

(i) கூடுதலான மாணவர்கள் இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை யாது?

(ii) ஆகார வகுப்பின் நடுப் பெறுமானத்தை எடுகொண்ட இடையாகக் கொண்டு ஒரு மாணவன் பெற்றுள்ள இடைப் புள்ளிகளைக் காண்க.

(iii) பரிகாரக் கற்றலை வழங்குவதற்குக் குறைந்த புள்ளிகளைப் பெற்ற 30% ஆனோர் வேறாக்கப்பட்டனர் எனின் அதற்காக எத்தனை புள்ளிகளிலும் பார்க்கக் குறைந்த புள்ளிகளைப் பெற்ற மாணவர்களைத் தெரிந்தெடுத்தல் வேண்டும்.

(iv) ஆகவும் கூடிய புள்ளிகளைப் பெற்ற 20% மாணவர்களுக்கு மிகச் சிறந்த தரம் வழங்கப்படுமெனின், அதற்காக எத்தனை புள்ளிகளிலும் பார்க்கக் கூடுதலான புள்ளிகளைப் பெற்ற மாணவர்களைத் தெரிந்தெடுத்தல் வேண்டும்.

**4.** தேசிய அரிசி நுகர்ச்சியைக் கூட்டுவதற்காக உள்நாட்டு அரிசியைச் சந்தைப்படுத்தும் கூட்டுறவு வர்த்தகக் கடை ஒன்றில் 90 நாட்களில் சந்தைப்படுத்தப்பட்ட அரிசியின் அளவு பற்றிய தகவல்கள் இடம்பெறும் அட்டவணையொன்று தரப்பட்டுள்ளது.

| ஒரு நாளில் விற்கப்பட்ட அரிசியின் அளவு (kg) | 151-175 | 176-200 | 201-225 | 226-250 | 251-275 | 276-300 | 301-325 | 326-350 | 351-375 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| நாட்களின் எண்ணிக்கை | 5 | 7 | 7 | 10 | 21 | 16 | 10 | 8 | 6 |

(i) இப்பரம்பலின் ஆகார வகுப்பை எழுதுக.

(ii) ஆகார வகுப்பின் நடுப் பெறுமானத்தை எடுகொண்ட இடையாகக் கொண்டு இக்காலத்திலே ஒரு நாளில் விற்கப்பட்ட அரிசியின் இடை நிறையை (kg இல்) கிட்டிய முழு எண்ணிற்குக் கணிக்குக.

(iii) இவ்வர்த்தகக் கோலம் எதிர்வரும் இரு மாதங்களுக்கும் இருக்குமெனின், 60 நாட்களுக்குத் தேக்கி வைக்ககப்பட வேண்டிய அரிசியின் அளவை மதிப்பிடுக.

(iv) இக்காலத்தின்போது ஒரு குறித்த நாளிலான விற்பனை 300 kg இற்குச்கூடியதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

**5.** ஒரு கணித வினாத்தாளுக்கு 100 பிள்ளைகள் வீதமான இரு குழுக்கள் பெற்ற இரு புள்ளிப் பரம்பல்கள் கீழே காணப்படுகின்றன.

| வகுப்பாயிடை | 1 - 10 | 11 - 20 | 21 - 30 | 31 - 40 | 41 - 50 | 51 - 60 | 61 - 70 | 71 - 80 | 81 - 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| குழு A பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை | 4 | 8 | 18 | 24 | 16 | 14 | 10 | 4 | 2 |
| குழு B பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை | 7 | 9 | 17 | 26 | 14 | 15 | 8 | 3 | 1 |

(i) இவ்வினாத்தாளுக்காக ஒரு பிள்ளை பெற்ற உயர்ந்தபட்சப் புள்ளிகள் எத்தனையாக இருக்கலாம்?

(ii) எடுகொண்ட இடையாக வகுப்பாயிடை 41 - 50 இன் நடுப் பெறுமானத்தைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு குழுவிற்காகவும் ஒரு பிள்ளை பெற்ற இடைப் புள்ளிகளைக் கணிக்க.

(iii) அதற்கேற்ப இரு குழுக்களில் இவ்வினாத்தாளுக்கு பெற்ற புள்ளிகளிலிருந்து மிகச் சிறந்த புள்ளிகளைப் பெற்ற குழு யாதென முடிவு செய்க.

**6.** ஒரு குறித்த மாதத்தில் 100 வீடுகளில் நுகர்ந்த மின்னலகுகளின் எண்ணிக்கை தொடர்பான தரவுகள் இடம்பெறும் ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே காணப்படுகின்றது.

| மின்னலகுகளின் எண்ணிக்கை | 31 - 40 | 41 - 50 | 51 - 60 | 61 - 70 | 71 - 80 | 81 - 90 | 91 - 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| வீடுகளின் எண்ணிக்கை | 5 | 12 | 26 | 34 | 18 | 3 | 2 |

(i) இப்பரம்பலின் ஆகார வகுப்பு யாது ?

(ii) வகுப்பாயிடை 61 - 70 இன் நடுப் பெறுமானத்தை எடுகொண்ட இடையாகக் கொண்டு ஒரு வீட்டின் நுகரப்படும் மின்னலகுகளின் இடை எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(iii) இலங்கை மின்சார சபை 61 - 90 அலகுகள் நுகரப்படும்போது ஒரு மின்னலகிற்கு ரூ. 14 ஐ அறவிடுகின்றது. அதற்கேற்ப இந்த 100 வீடுகளுக்கு இலங்கை மின்சார சபை அறவிடுவதாக எதிர்பார்க்கத்தக்க வருமானம் யாது ?

**7.** ஒரு தனியார் தொலைபேசிக் கம்பனி ஒரு குறித்த பிரதேசத்தில் தனது கம்பனியின் தொலைபேசிகளைப் பயன்படுத்துபவர்களின் மாதத் தொலைபேசிச் சிட்டைகள் தொடர்பாக மேற்கொண்ட ஒரு கணிப்பீட்டின் தரவுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் காணப்படுகின்றன.

| மாதத் தொலைபேசிக் கட்டணம் | 100-250 | 250-400 | 400-550 | 550-700 | 700-850 | 850-1000 | 1000-1150 | 1150-1300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| பயன்படுத்துபவர் | 2 | 5 | 7 | 15 | 20 | 10 | 8 | 3 |

(i) இப்பரம்பலின் ஆகார வகுப்பு யாது ?

(ii) வகுப்பு 550 - 700 இன் நடுப் பெறுமானத்தை எடுகொண்ட இடையாகக் கொண்டு மாதத் தொலைபேசிக் கட்டணத்தின் இடையைக் காண்க.

(iii) மேற்குறித்த இடைக்கேற்ப இவ்வகைத் தொலைபேசி வலையமைப்பைப் பயன்படுத்தும் நுகர்வோர் 1000 பேரிடமிருந்து தொலைபேசிக் கட்டணமாகக் கம்பனிக்கு எவ்வளவு பணம் கிடைக்குமென எதிர்பார்க்கலாம்.

(iv) மாதத் தொலைபேசிக் கட்டணம் ரூ. 850 இற்கு மேற்பட்டதாக இருக்கும் நுகர்வோரின் சிட்டைகள் விசேட சீட்டிழுப்புக்கு உட்படுத்துமெனின், இக்குழுவில் உள்ள நுகர்வோர்களில் 30% இற்கு மேற்பட்டோருக்கு அவ்வாய்ப்புக் கிடைக்குமெனக் காட்டுக.

**8.** செலுத்தப்படும் வாகனங்களின் கதி பரிசோதிக்கப்படும் ஓர் இடத்தில் இரு மணித்தியால நேர வீச்சில் பெறப்பட்ட தகவல்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் காணப்படுகின்றன. (30 - 40 இன் மூலம் கதி 30 இற்குக்கூடுதலானவும் 40 அல்லது 40 இற்குக் குறைந்ததுமான கதி ஆயிடை காட்டப்படுகின்றது.)

| கதி ($kmh^{-1}$) | 20 - 30 | 30 - 40 | 40 - 50 | 50 - 60 | 60 - 70 | 70 - 80 | 80 - 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| வாகனங்களின் எண்ணிக்கை | 5 | 7 | 12 | 16 | 15 | 3 | 2 |

(i) இப்பரம்பலின் ஆகார வகுப்பு யாது?

(ii) 70 $kmh^{-1}$ இலும் கூடிய கதியில் வாகனத்தைச் செலுத்தும் சாரதிகளுக்கு எதிராக வழக்கு தொடுக்கப்படுமெனின், இக்காலத்தில் கதி மட்டுப்பாட்டை விஞ்சுவதற்கு எதிராக வழக்கு தொடுக்கப்படுபவர்களின் எண்ணிக்கையின் சதவீதத்தைக் காண்க.

(iii) வகுப்பு 50 - 60 இன் நடுப் பெறுமானத்தை எடுகொண்ட இடையாகக் கொண்டு இந்த இடத்தைக் கடந்து சென்ற ஒரு வாகனத்தின் இடைக் கதியைக் காண்க.

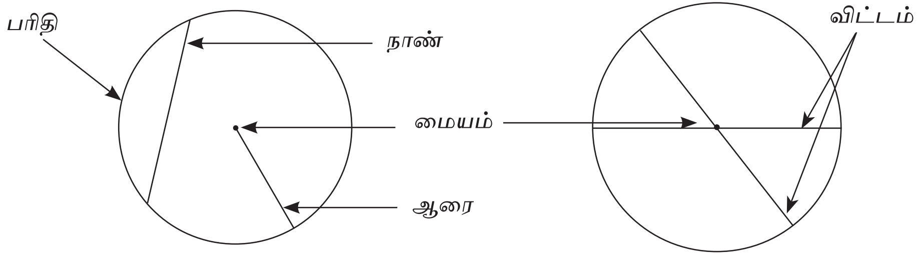
(iv) மேற்குறித்த இடைக் கதியுடன் இரண்டு மணித்தியாலங்களில் செல்லத்தக்க தூரம் யாது?

# 27 வட்டத்தின் நாண்கள்

**இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,**

- வட்டமொன்றின் நாணொன்றின் நடுப் புள்ளியை மையத்துடன் இணைக்கும் கோடு அந்நாணுக்குச் செங்குத்தாகும் என்ற தேற்றத்தை அறிந்துகொள்ளவும்
- வட்டமொன்றின் மையத்திலிருந்து நாணொன்றுக்கு வரையப்படும் செங்குத்தினால் அந்நாண் இருசமகூறிடப்படும் என்ற தேற்றத்தை அறிந்து கொள்வதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.




வட்டமொன்றின் மையத்தையும் அவ்வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர் கோட்டுத் துண்டம் அவ்வட்டத்தின் ஆரை எனப்படும். ( உருவைப் பார்க்க )
இக்கோட்டுத்துண்டத்தின் நீளமானது பரிதியின்மீது எப்புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுப்பினும் மாறாது. எனவே வட்டத்தின் மையத்திற்கும் பரிதிக்கும் இடையேயான மிகக் குறுகிய தூரம் அரை எனப்படும்.

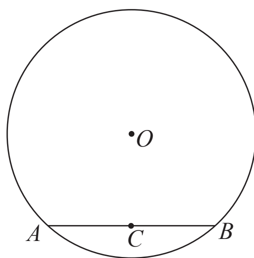
ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுத் துண்டமானது நாண் என அழைக்கப்படும்.

மையத்தினூடாச் செல்லும் நாண் விட்டம் எனப்படும். ஒரு வட்டத்தின் எல்லா விட்டங்களும் நீளத்தில் சமமானவை ஆகும். அதன் நீளத்தையும் விட்டம் என்றே அழைப்போம். ஒரு வட்டத்தின் மிக நீளமான நாண் விட்டம் ஆகும். விட்டத்தின் நீளமானது ஆரையின் நீளத்தின் இரண்டு மடங்காகும்.

## 27.1 வட்டமொன்றின் மையத்திலிருந்து நாணொன்றின் நடுப்புள்ளிக்கு வரையப்படும் நேர்கோடு

**செயற்பாடு 1**

- தாள் ஒன்றில் கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி 3 சென்ரிமீற்றர் ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தை வரைந்து அதன் மையத்தை $O$ எனப் பெயரிடுக. அதில் விட்டமல்லாத $AB$ என்னும் நாணை வரைக.
- வரைகோலினால் அளந்து நடுப் புள்ளியை $C$ எனக் குறிக்க.
- ஒரு பாகைமானியின் துணையுடன் $O\hat{C}A$ ( அல்லது $O\hat{C}B$ ) இன் பெறுமானத்தை அளந்து காண்க. அக்கோணம் $90^\circ$ என்பதை அதாவது $OC$ , $AB$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தென்பதை அவதானிக்க.




- இதே வட்டத்தில் வெவ்வேறு நீளமுடைய மேலும் சில நாண்களை வரைந்து நாணின் நடுப் புள்ளியையும் மையத்தையும் இணைக்கும் கோடு அந்நாணுக்குச் செங்குத்தாகும் என்பதை அவதானிக்க.
- வெவ்வேறு ஆரைகளையுடைய சில வட்டங்களை வரைந்து மேற்குறித்த செயற்பாட்டை மீண்டும் செய்க.

நீங்கள் பெற்றுக்கொண்ட பேறை வகுப்பில் மற்றைய மாணவர்களுடன் கலந்துரையாடுக.

நாம் அறிந்துகொண்ட இத்தொடர்பு ஒரு வட்டத்தின் நாண் தொடர்பான ஒரு தேற்றமாகும்.

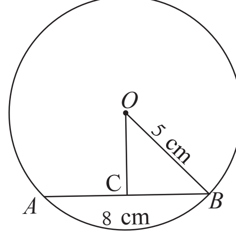
**தேற்றம்:** வட்டமொன்றின் நாணொன்றின் நடுப்புள்ளியை மையத்துடன் இணைக்கும் கோடு அந்நாணுக்குச் செங்குத்தாகும்.

மேலேயுள்ள தேற்றத்தை உபயோகித்து கணித்தல்களைச் செய்யும் முறைகளைப் பார்ப்போம்.

**உதாரணம்** 1

$AB$ என்பது $O$ ஐ மையமாகவும் 5 cm ஆரையும் உடைய வட்டமொன்றின் நாண் ஆகும். $AB$ இன் நடுப்புள்ளி $C$ ஆகும். $AB =$ 8 cm ஆயின் $OC$ இன் நீளத்தைக் காண்க.

மேலேயுள்ள தகவல்களை உள்ளடக்கிய ஓர் உருவை வரைவோம்.




$O\hat{C}B = 90^\circ$ (வட்டமொன்றின் மையத்தையும் நாணொன்றின் நடுப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு அந்நாணுக்குச் செங்குத்து ஆவதால்)

முக்கோணி $OCB$ ஒரு செங்கோண முக்கோணியாகும் இம்முக்கோணியில் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகித்து $OC$ இன் நீளத்தைக் காண்போம்.

$BC = \frac{8}{2} =$ 4 cm ($C$ என்பது $AB$ இன் நடுப்புள்ளி என்பதால்)

$OB$ = 5 cm (வட்டத்தின் ஆரை )

$OB^2 = OC^2 + CB^2$ (பைதகரசின் தேற்றம் )

$\therefore \quad 5^2 = OC^2 + 4^2$

$25 = OC^2 + 16$

$25 - 16 = OC^2$

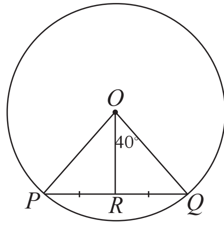
$OC^2 = 9$

$\therefore OC = \sqrt{9}$

$= 3$ cm

**உதாரணம்** 2

$PQ$ என்பது $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் நாண் ஆகும். $PQ$ இன் நடுப்புள்ளி $R$ ஆகும். $Q\hat{O}R = 40^\circ$ ஆயின் $O\hat{P}R$ ஐக் காண்க.




$O\hat{R}Q = 90^\circ$ (ஒரு வட்டத்தின் நாணொன்றின் நடுப்புள்ளியை மையத்துடன் இணைக்கும் கோடு நாணுக்கு செங்குத்து என்பதால்)

ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180^\circ$ என்பதால்,

$$O\hat{Q}P = 180^\circ - (40^\circ + 90^\circ)$$

$$\therefore O\hat{Q}R = 50^\circ$$

இப்போது முக்கோணி $OPQ$ ஐக் கவனிப்போம்

$OQ = OP$ (ஒரு வட்டத்தின் ஆரைகள் )

$\therefore$ $OPQ$ ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியாகும்.

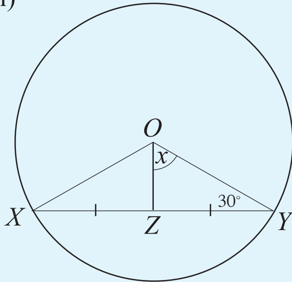
$$\therefore O\hat{P}R = O\hat{Q}R$$

$$\therefore O\hat{P}R = 50^\circ$$

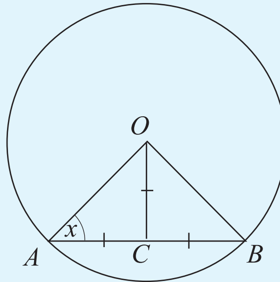
**பயிற்சி 27.1**

**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் உருவிலும் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளின்படி $x$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க

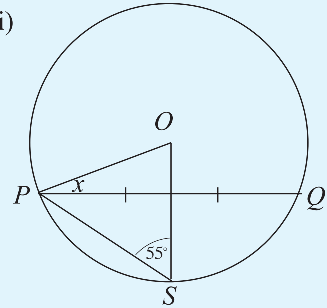
(i)



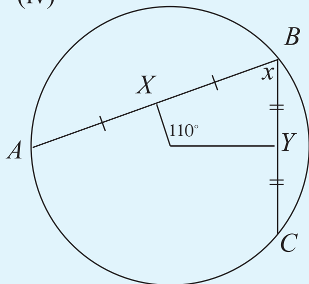

(ii)



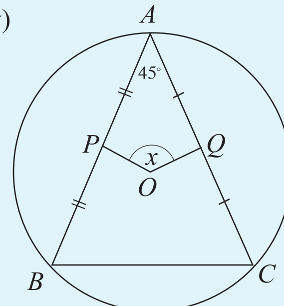

(iii)



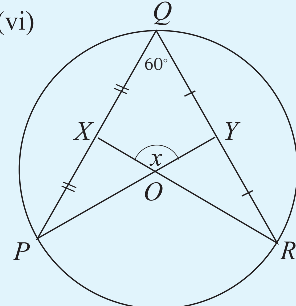

(iv)



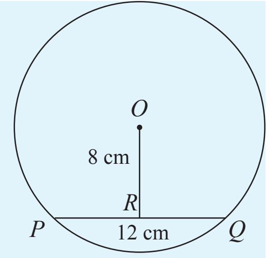

(v)



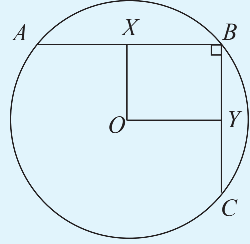

(vi)



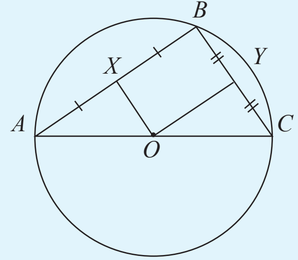
**2.** $PQ$ என்பது $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் நாண் ஆகும். அதன் நடுப்புள்ளி $R$ ஆகும். $PQ = 12$ cm , $OR = 8$ cm ஆயின் வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.



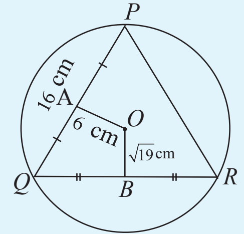

**3.** $AB$ , $BC$ என்பன $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு நாண்களாகும். $AB = 12$ cm உம் $BC = 8$ cm உம் ஆகும். $AB$, $BC$ ஆகிய நாண்களின் நடுப்புள்ளி $X$ , $Y$ ஆகும். நாற்பக்கல் $OXBY$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.



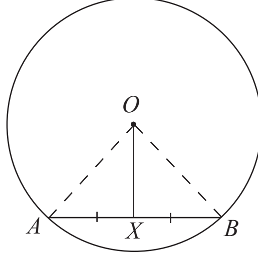

**4.** $AB$ , $BC$ என்பன $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் நாண்கள் ஆகும். அந்நாண்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே $X$ , $Y$ ஆகும். வட்டத்தின் ஆரை 5 cm உம் $AB = 8$ cm உம் $BC = 6$ cm உம் ஆயின் $BXOY$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.




**5.** முக்கோணி $PQR$ இன் $P$, $Q$, $R$ ஆகிய புள்ளிகள் $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் அமைந்துள்ளன. $PQ$ , $QR$ ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே $A$ , $B$ ஆகும். $PQ = 16$ cm, $OA = 6$ cm , $OB = \sqrt{19}$ cm ஆயின் $QR$ என்னும் பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்க.



## 27.2 வட்டமொன்றின் மையத்தையும் நாணொன்றின் நடுப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு அந்நாணுக்குச் செங்குத்தாகும் என்னும் தேற்றத்தின் நிறுவல்




**தரவு** : $AB$ என்பது $O$ வை மையமாகவுடைய வட்டமொன்றின் நாணாகும். $AB$ இன் நடுப்புள்ளி $X$ ஆகும்.

**நிறுவ வேண்டியது** : $OX$ ஆனது $AB$ இற்குச் செங்குத்தாகும்.

**அமைப்பு** : $OA$, $OB$ ஐ இணைக்க.

**நிறுவல்** : $OXA$ ,$OXB$ ஆகிய முக்கோணிகளில்

$AO = BO$ (ஒரு வட்டத்தின் ஆரைகள் )

$AX = XB$ (பக்கம் $AB$ இன் நடுப்புள்ளி $X$ என்பதால்)

$OX$ பொதுப் பக்கம்

$\therefore \Delta OXA \equiv \Delta OXB$ (ப.ப.ப. நிபந்தனை)

$\therefore \quad O\hat{X}A = O\hat{X}B$

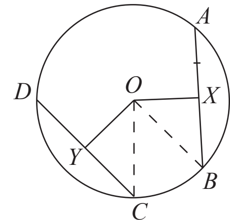
$O\hat{X}A + O\hat{X}B = 180^{\circ}$ (நேர்கோட்டின் அடுத்துள்ள கோணங்கள்)

$\therefore \quad 2O\hat{X}A = 180^{\circ}$

ஆனால் $O\hat{X}A = 90^{\circ}$

$\therefore$ $OX$ ஆனது $AB$ இற்குச் செங்குத்தாகும்.

மேலேயுள்ள தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஒத்த பிரசினங்களை நிறுவும் முறையை ஆராய்வோம்.




**உதாரணம்** 1

$AB$, $CD$ என்பன $O$ ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு சமனான நாண்களாகும். அவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே $X$ ,$Y$ ஆகும். $OX = OY$ என நிறுவுக.

**$OX = OY$ எனக் காட்டுவதற்காக $OXB$ , $OYC$ ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளையும் செ.ப.ப. நிபந்தனையைப் பயன்படுத்தி ஒருங்கிசையும் எனக் காட்டுவோம்.**

$OXB, OYC$ ஆகிய முக்கோணிகளில்

$O\hat{X}B = 90^\circ$ யும் $O\hat{Y}C = 90^\circ$ உம் ஆகும். ( $\because$ $X$ , $AB$ யின் நடுப்புள்ளி $Y$ ஆனது $CD$ யின் நடுப்புள்ளி என்பதால் )

$OB = OC$ (ஒரு வட்ட ஆரைகள்)

மேலும் $AB = CD$ என்பதால் $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$ ஆகும்.

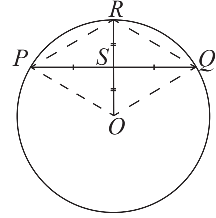
அதாவது $XB = YC$ ($X$ , $Y$ என்பன நாண்களின் நடுப்புள்ளிகள் என்பதால்)

$\therefore \Delta OXB \equiv \Delta OYC$ (செ.ப.ப.)

$\therefore OX = OY$ (ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள்)

**உதாரணம் 2**

$O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் நாண் $PQ$ இன் நடுப்புள்ளி $S$ ஆகும். $OS$ நீட்டும்போது வட்டத்தை $R$ இல் சந்திக்கின்றது. $RS = SO$ ஆயின் $OPRQ$ ஒரு சாய்சதுரம் எனக் காட்டுக.




$PS = SQ$ ( பக்கம் $PQ$ இன் நடுப்புள்ளி $S$ ஆகையால்)

$RS = SO$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\therefore OPRQ$ ஓர் இணைகரமாகும்.

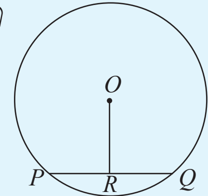
$P\hat{S}O = 90^\circ$

$\therefore$ $PQ$ உம் $RO$ உம் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருசமகூறிடுகின்றன.

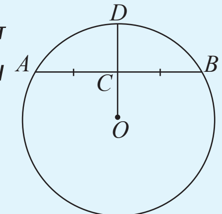
$\therefore$ $OPRQ$ ஒரு சாய்சதுரமாகும். (ஒரு சாய்சதுரத்தில் மூலைவிட்டங்கள் செங்குத்தாக இருசமகூறிடுவதால் )

**பயிற்சி 27.2**

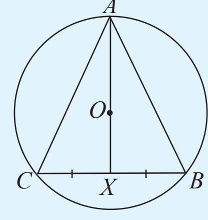
**1.** $O$ ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தில் நாண் $PQ$ இன் நடுப்புள்ளி $R$ ஆகும். $R\hat{O}Q = 45^\circ$ ஆயின் $RQ = OR$ எனக் காட்டுக.



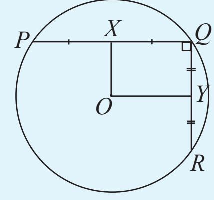

**2.** $AB$ என்பது $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் நாண் ஆகும். அதன் நடுப்புள்ளி $C$ ஆகும். நீட்டப்பட்ட $OC$ ஆனது வட்டத்தை $D$ இல் சந்திக்கின்றது. $AD = DB$ எனக் காட்டுக.



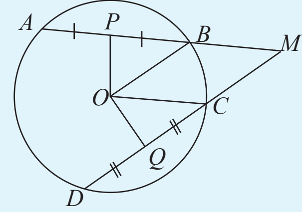
**3.** முக்கோணி $ABC$ இல் $A, B, C$ ஆகிய புள்ளிகள் $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின்மீது அமைந்துள்ளன. $BC$ இன் நடுப்புள்ளி $X$ ஆகும். கோடு $AX$ இன் மீது $O$ அமையுமாயின் $AB = AC$ எனக் காட்டுக.



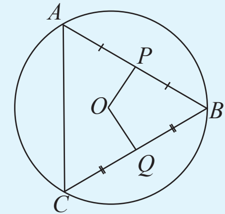

**4.** $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் $PQ, QR$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு நாண்களாகும். இந் நாண்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே $X, Y$ ஆகும். $OXQY$ ஒரு செவ்வகம் எனக் காட்டுக.



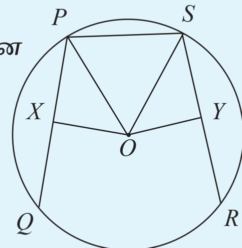

**5.** $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் $AB$, $CD$ என்பன இரு நாண்களாகும். இந்நாண்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே $P$ , $Q$ ஆகும். நீட்டப்பட்ட $AB$ , $DC$ ஆகிய நாண்கள் $M$ இல் சந்திக்கின்றன. $P\hat{O}Q$ , $P\hat{M}Q$ ஆகியன மிகை நிரப்பு கோணங்கள் எனக் காட்டுக.




**6.** $O$ ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தில் $AB$, $BC$ ஆகிய நாண்களின் நடுப்புள்ளிகள் $P, Q$ ஆகும். $P\hat{O}Q = B\hat{A}C + A\hat{C}B$ எனக் காட்டுக.




**7.** $O$ ஐ மையமாவுடைய ஒரு வட்டத்தில் $PQ$, $RS$ என்பன சமனான நாண்களாகும். அவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் $X$, $Y$ ஆகும். $X\hat{P}S = Y\hat{S}P$ எனக் காட்டுக.



## 27.3 வட்டமொன்றின் மையத்திலிருந்து நாணொன்றுக்கு வரையப் படும் செங்குத்தினால் அந்நாண் இருசமகூறிடப்படும்

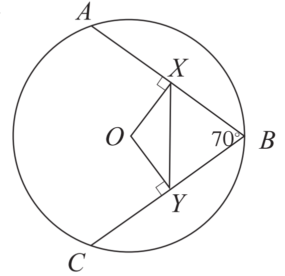
முன்னர் கற்ற தேற்றத்தில் ஒரு நாணின் நடுப்புள்ளியுடன் மையத்தை இணைக்கும் கோடு அந்நாணுக்குச் செங்குத்தாகும் என்பது எடுத்துரைக்கப்பட்டது. அதன் மறுதலையும் உண்மையானதாகும். அது கீழே உள்ள தேற்றத்தில் தரப்பட்டுள்ளது.

**தேற்றம்:** ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து நாணொன்றுக்கு வரையப்படும் செங்குத்தானது அந்நாணை இருசமகூறிடும்.

என்ற தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கணித்தல்கள் உள்ளடங்கிய சில உதாரணங்களை இப்போது ஆராய்ந்து பார்ப்போம்.

**உதாரணம்** 1

$AB$, $BC$ ஆகியன $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திலுள்ள சமனான நாண்களாகும். $O$ இலிருந்து நாண்களுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகள் முறையே $OX$, $OY$ ஆகும். $X\hat{B}Y = 70^\circ$ ஆயின் $B\hat{X}Y$ இன் பெறுமானம் காண்க.




$OX \perp AB$, $OY \perp BC$ என்பதால்

$AB$ இன் நடுப்புள்ளி $X$ உம்
$BC$ இன் நடுப்புள்ளி $Y$ உம் ஆகும்.
மேலும் $AB = BC$ எனத் தரப்பட்டுள்ளதால் அதிலிருந்து $XB = YB$ எனக் கிடைக்கின்றது.

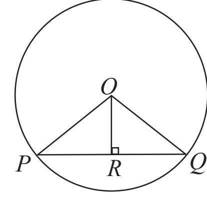
$\therefore \Delta BXY$ ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியாகும்.

$\therefore B\hat{X}Y = B\hat{Y}X$ ஆகும்.

$$\therefore B\hat{X}Y = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2}$$

$$= 55^\circ$$

**உதாரணம் 2**




$O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் நாண் $PQ$ இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து $OR$ ஆகும்.
$OR = 3$ cm , $PQ = 8$ cm ஆயின் வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.
$PQ \perp OR$ என்பதால் $R$ என்பது $PQ$ இன் நடுப்புள்ளி ஆகும்.

$\therefore\ PR = \frac{8}{2} = 4$ cm

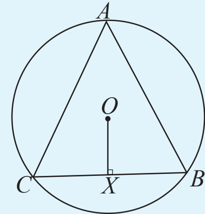
இனி,
முக்கோணி $OPR$ இற்கு பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகித்தால்,

$$OP^2 = OR^2 + PR^2$$
$$= 3^2 + 4^2$$
$$= 25$$
$$OP = \sqrt{25}$$
$$= 5\text{cm}$$

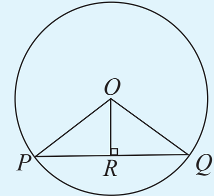
$\therefore$ வட்டத்தின் ஆரை 5 cm ஆகும்.

**பயிற்சி 27.3**

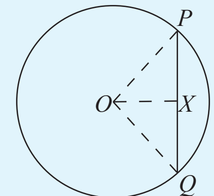
1. சமபக்க முக்கோணி $ABC$ இன் $A, B, C$ ஆகிய புள்ளிகள் $O$ ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன. $O$ இலிருந்து $BC$ இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து $OX$ ஆகும். $XB = 6$ cm ஆயின் முக்கோணி $ABC$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.



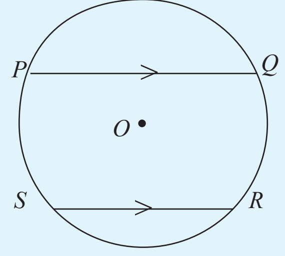

2. $PQ$ என்பது $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் நாண் ஆகும். $O$ இலிருந்து $PQ$ இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து $OR$ ஆகும். $PQ = 12$ cm, $OR = 8$ cm ஆயின் முக்கோணி $OPQ$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.



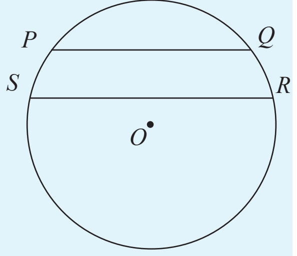

3. $PQ$ என்பது $O$ ஐ மையமாவுடைய ஒரு வட்டத்தின் நாண் ஆகும். $O$ இலிருந்து $PQ$ இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து $OX$ ஆகும். $PQ = 6$ cm உம் வட்டத்தின் ஆரை 5 cm உம் ஆயின் $OX$ இன் நீளத்தைக் காண்க.



4. $PQ, SR$ என்பன $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் மையத்தின் இருபக்கமும் அமைந்துள்ள சமாந்தரமான இரண்டு நாண்களாகும். வட்டத்தின் ஆரை 10 cm ஆகும். $PQ = 16$ cm , $SR = 12$ cm ஆயின் இரண்டு நாண்களுக்கும் இடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.



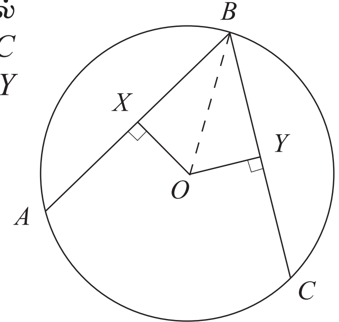

5. $PQ$, $RS$ என்பன $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் மையத்திற்கு ஒரே பக்கத்தில் அமைந்துள்ள ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமான இரண்டு நாண்களாகும். வட்டத்தின் ஆரை 10 cm, $PQ = 12$ cm, $SR = 16$ cm ஆயின் இரண்டு நாண்களுக்குமிடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.




## 27.4 வட்டமொன்றின் மையத்திலிருந்து நாணுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தினால் அந்நாண் இருசமகூறிடப்படும் என்ற தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஒத்த ஏறிகளை நிறுவுதல்

**உதாரணம்** 1

$AB$ , $BC$ என்பன $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு சமனான நாண்களாகும். $O$ இலிருந்து $AB$, $BC$ ஆகியவற்றுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகள் $OX$, $OY$ ஆகும். $OX = OY$ என நிறுவுக.

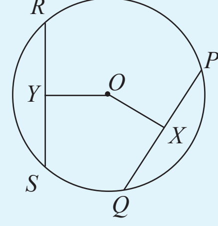



$OXB$ , $OYB$ ஆகிய செங்கோண முக்கோணிகளை செ.ப.ப. நிபந்தனையின் கீழ் ஒருங்கிசைவை செய்வதன்மூலம் OX = OY என நிறுவுவோம்.

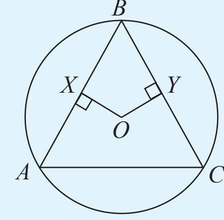
$OXB$ , $OYB$ ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளிலும் பொதுப் பக்கம் $OB$ ஆகும்.
$AB = BC$ என்பதால் $XB = YB$ ஆகும். (மேலேயுள்ள தேற்றத்தின் படி)
$\therefore \Delta OXB \equiv \Delta OYB$ (செ.ப.ப.)
$\therefore$ $OX = OY$ ஆகும்.

**பயிற்சி** 27.4

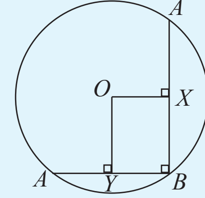
**1.** $PQ$, $RS$ என்பன $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு நாண்களாகும். $OX$, $OY$ என்பன O இலிருந்து $PQ$ , $RS$ என்பவற்றுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகளாகும். $OX = OY$ எனின் $PQ = RS$ என நிறுவுக.
(சாடை $OS$ , $OQ$ ஆகியவற்றை இணைக்க)



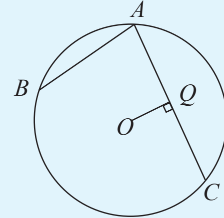

**2.** முக்கோணி $ABC$ இல் $A, B, C$ ஆகிய புள்ளிகள் $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன. $AB$ , $BC$ என்பவற்றுக்கு $O$ இலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துகள் முறையே $OX$, $OY$ ஆகும். $AX = CY$ ஆயின் $B\hat{A}C = B\hat{C}A$ என நிறுவுக.




**3.** $AB$, $BC$ என்பன $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு சமனான நாண்களாகும். $OXBY$ ஒரு சதுரம் என நிறுவுக.



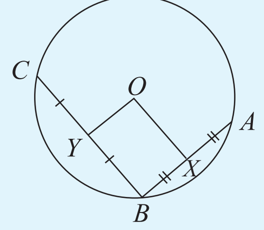

**4.** $AB$, $AC$ என்பன $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு நாண்களாகும். $O$ இலிருந்து $AC$ இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து $OQ$ ஆகும். $2AB = AC$ ஆயின் $AB = AQ$ என நிறுவுக.



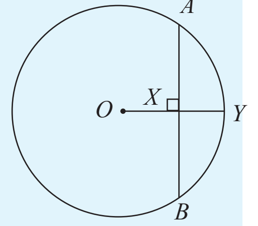
## பலவினப் பயிற்சி

**1.** ஒரு வட்டத்தின் நாண் மையத்திலிருந்து 8 cm தூரத்தில் அமைந்துள்ளது. நாணின் நீளம் 12 cm ஆயின் வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

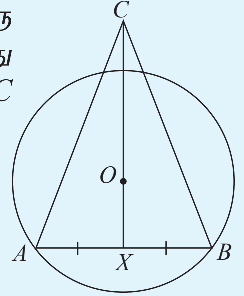
**2.** $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் ஆரை 5 cm ஆகும். $AB$, $BC$ ஆகிய நாண்களின் நீளங்கள் 6 cm, 8 cm ஆகும். நாண்களின் நடுப்புள்ளி $X$, $Y$ ஆகும். நாற்பக்கல் $OXBY$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.



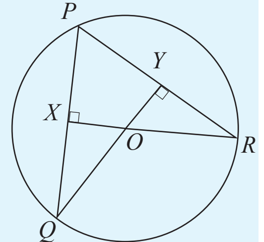

**3.** $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் $AB$ என்பது 8 cm நீளமுள்ள ஒரு நாண் ஆகும். $O$ இலிருந்து நாணுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தானது நாணை $X$ இல் இடைவெட்டுவதுடன் வட்டத்தை $Y$ இல் சந்திக்கின்றது. $XY = 3$ cm ஆயின் வட்டத்தின் ஆரையின் நீளத்தைக் காண்க.




**4.** $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் $AB$ என்பது ஒரு நாண் ஆகும். அதன் நடுப்புள்ளி $X$ ஆகும். $X$ இலிருந்து $O$ விற்கூடாக வரையப்பட்ட கோட்டின்மீது புள்ளி $C$ அமைந்துள்ளது. $AC = BC$ என நிறுவுக.

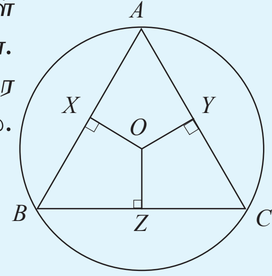



**5.** $O$ ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தில் $PQ$, $PR$ என்பன இரு நாண்களாகும். $O$ இலிருந்து $PQ$, $PR$ என்பவற்றுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகள் முறையே $OX$, $OY$ ஆகும். $RX$, $QY$ என்பன நேர்கோடுகள் எனின் $PQ = PR$ என நிறுவுக.

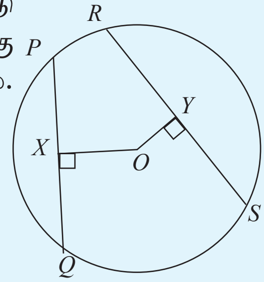


**6.** வட்டமொன்றில் மையத்திலிருந்து 5 cm தூரத்தில் 24 cm நீளமுள்ள நாண் அமைந்துள்ளது. மேலுமொரு நாண் மையத்திலிருந்து 12 cm தூரத்தில் அமைந்துள்ளது. அந்நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

**7.** சமபக்க முக்கோணி $ABC$ இன் $A, B, C$ ஆகிய புள்ளிகள் $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் அமைந்துள்ளன. மையத்திலிருந்து முக்கோணியின் பக்கங்களுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கள் முறையே $OX, OY, OZ$ ஆகும். $OX = OY = OZ$ என நிறுவுக.




**8.** $O$ ஐ மையமாவுடைய வட்டத்தில் $PQ$, $RS$ என்பன இரண்டு நாண்களாகும். O இலிருந்து $PQ$, $RS$ என்பவற்றுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கள் முறையே $OX$, $OY$ ஆகும். $PQ^2 - RS^2 = 4OY^2 - 4OX^2$ எனக் காட்டுக.



# 28 அமைப்புகள்

**இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,**

- கவராயத்தையும் நேர்விளிம்பையும் பயன்படுத்தி அடிப்படை ஒழுக்குகள் நான்கையும் அமைப்பதற்கும்
- சமாந்தர கோடுகளைக் கொண்ட நேர்கோட்டுத் தளவுருக்களை அமைப்பதற்கும்
- தரப்பட்ட தரவுகளிலிருந்து முக்கோணிகளை அமைப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

## 28.1 அடிப்படை ஒழுக்குகளின் அமைப்புகள்

அசையும் ஒரு புள்ளியின் பயணப் பாதை அப்புள்ளியின் **ஒழுக்கு** எனப்படும். அன்றாட வாழ்வில் சுற்றாடல் தொடர்பாகக் காணக்கிடைக்கும் ஒழுக்குகளுக்கான சில உதாரணங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

1. ஒரு மரத்திலிருந்து விழும் ஒரு காயின் பயணப் பாதை.
2. ஒரு கடிகார முள்ளின் முனையின் பயணப் பாதை.
3. சூரியனைச் சுற்றிச் சுழலும் ஒரு கிரகத்தின் பயணப் பாதை.
4. ஓர் ஊசல் கடிகாரத்தின் ஊசலின் பயணப் பாதை.
5. ஒரு துடுப்பினால் பந்தை அடிக்கும்போது பந்தின் பயணப் பாதை.

கேத்திரகணித ரீதியாக விபரிக்கக்கூடிய நான்கு ஒழுக்குகள் பற்றி இப்பாடத்தில் கற்போம். இப்பாடத்தில் நாம் ஒரே தளத்திலுள்ள ஒழுக்குகளில் மாத்திரம் கவனஞ் செலுத்துவோம்.

குறிப்பு: ஒழுக்குக்களின் அமைப்பைப் பார்ப்பதற்கு முன்னர் இவை தொடர்பான பின்வரும் உண்மைகள் தொடர்பாகக் கவனஞ் செலுத்துவோம்.

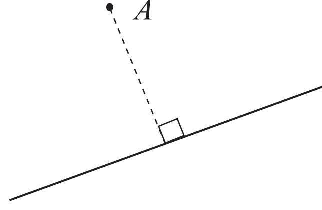
**1.இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையேயான தூரம்**

ஒரு தளத்தில் உள்ள இரு புள்ளிகளான $A$ ஐயும் $B$ ஐயும் கருதுவோம். இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையேயான தூரம் என்பதால் கருதப்படுவது யாதெனில் அவ்விரு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் நீளமாகும்.

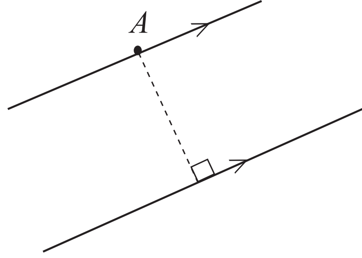



**2. ஒரு கோட்டிற்கும் புள்ளியொன்றிற்கும் இடையேயான தூரம்:**

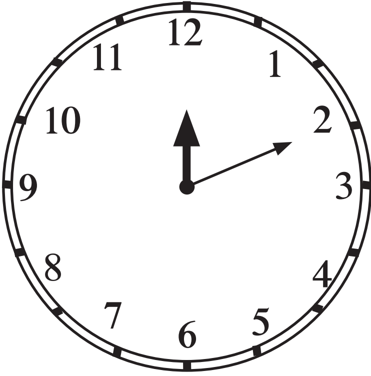
தரப்பட்டுள்ள புள்ளி $A$ ஐயும் தரப்பட்ட கோட்டுத் துண்டத்தையும் கருதுவோம். புள்ளி $A$ யில் இருந்து கோட்டுத் துண்டத்திற்கான தூரம் என்பது யாதெனில் அப் புள்ளியில் இருந்து அக்கோட்டுத் துண்டத்திற்கான குறுகிய தூரமாகும். இக்குறுகிய நீளம் ஆனது $A$ யில் இருந்து கோட்டுத்துண்டத்திற்கான செங்குத்துத் தூரமாகும்.




3. **இரண்டு சமாந்தர கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்** :
கீழே தரப்பட்டுள்ள சமாந்தர கோடுகளைக் கருதுக. இவ்விரண்டு கோடுகளில் ஒன்றில் $A$ என்னும் புள்ளியைக் குறிக்க. புள்ளி $A$ யில் இருந்து மற்றைய கோட்டுக்கான குறுகிய (செங்குத்து) தூரம் இச்சமாந்தர கோட்டுக்கிடையேயான தூரம் எனப்படும். இக்கோடுகள் சமாந்தரம் என்பதால் முறையே $A$ எங்கு அமைந்திருந்தாலும் இத்தூரமானது இக்கோடுகளுக்கிடையே எந்த இடத்திலும் மாறாததாகும்.




## 1.நிலையான புள்ளியிலிருந்து மாறாத் தூரத்தில் அசையும் ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கை அமைத்தல்

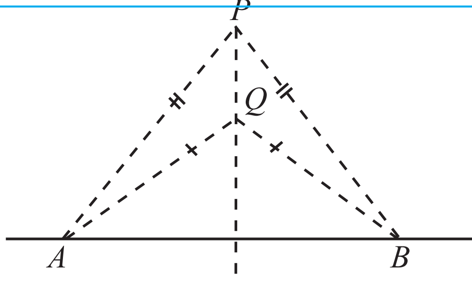



உருவிலுள்ள கடிகாரத்தில் ஒவ்வொரு முள்ளினதும் முனை முள் பொருத்தப்பட்டுள்ள அச்சிலிருந்து மறாத் தூரத்தில் இருக்கும். கடிகாரம் இயங்கும்போது அதிலிலுள்ள முள்ளினது முனை பயணம் செய்யும் பாதை வட்டவடிவானதென்பதை நீங்கள் அவதானிக் கலாம். கடிகாரத்தின் முட்கள் அச்சில் பொருத்தப் பட்டுள்ள இடம் வட்டத்தின் மையமாயிருப் பதுடன் ஒவ்வொரு முள்ளினதும் நீளம் வட்டத்தின் ஆரையாகும். இங்கு முள்ளின் ஒரு முனை (அச்சில்) நிலையான ஒரு புள்ளியிலிருந்து மறாத் தூரத்தில் பயணம் செய்வதை அவதானிக்கலாம்.

எனவே, நிலையான ஒரு புள்ளியிலிருந்து மறாத் தூரத்தில் அசையும் ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கு வட்டமாகும்.

தற்போது அவ்வொழுக்கை எவ்வாறு அமைப்பது எனப் பார்ப்போம். நிலைத்த புள்ளி $O$ வைக் குறிப்போம். பின் அப்புள்ளியிலிருந்து மறாத் தூரத்தை கவராயத்தில் அளந்து எடுத்து கவராயத்தின் கூர் முனையை மையத்தில் வைத்து வட்டத்தை அமைக்க.

## 2. இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து சமனான தூரத்தில் அசையும் ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கை அமைத்தல்




உருவிலுள்ளவாறு புள்ளி $P$ ஆனது $A$, $B$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளிலுமிருந்தும் சமனான தூரத்தில் அமைந்துள்ளது. புள்ளி $Q$ உம் $A$, $B$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளிலுமிருந்து சமனான தூரத்தில் அமைந்துள்ள இன்னொரு புள்ளியாகும். $A$, $B$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளிலுமிருந்தும் சமனான தூரத்தில் அமைந்துள்ள இவ்வாறன அதிக எண்ணிக்கையிலான புள்ளிகள் உள்ளன. அச்சகல புள்ளிகளையும் இணைக்கும்போது பெறப்படுவது யாது என அவதானிக்க. அப்போது, அப்புள்ளிகளை இணைப்பதால் பெறப்படும் கோடானது $A$, $B$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளியினூடாகச் செல்கிறது என்பதும் அது கோடு $AB$ இற்குச் செங்குத்தானது என்பதும் தெளிவாகும்.

எனவே, இரண்டு நிலைத்த புள்ளிகளிலிருந்து சமனான தூரத்தில் அசையும் ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கு, அந்நிலையான இரண்டு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோட்டின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியாகும்.

இனி, அவ்வொழுக்கை, அதாவது கோட்டுத்துண்டம் $AB$ இன் செங்குத்து இரு சமகூறாக்கியை அமைக்கும் முறை பற்றி ஆராய்வோம்.

முதலில் $A$, $B$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைத்து நேர்கோட்டுத் துண்டம் $AB$ ஐ வரைவோம்.

A • • B

A ——— B

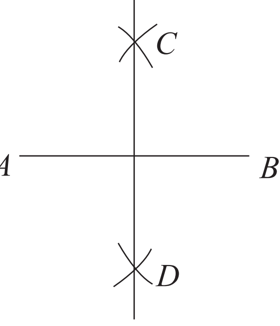


**படிமுறை** 1 கோட்டுத் துண்டம் $AB$ இன் நீளத்தின் அரைப் பங்கிலும் கூடிய ஆரையைக் கொண்டதாகக் கவராயத்தை ஒழுங்கு செய்து $A$, $B$ ஆகிய புள்ளிகளில் ஒவ்வொன்றையும் மையமாகக் கொண்டு (உருவிலுள்ளவாறு) இரண்டு வட்ட விற்களும் இடைவெட்டுமாறு வரைக.

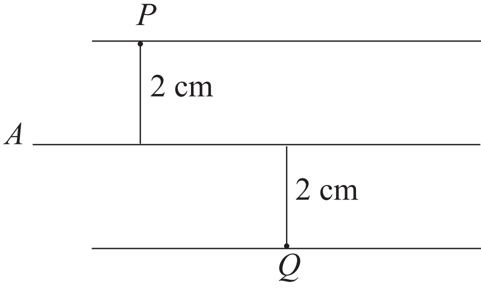
A ——— B



**படிமுறை** 2 அவ்வட்டவிற்கள் இரண்டும் இடைவெட்டும் புள்ளிகளை $C$, $D$ எனப் பெயரிடுக. $C$, $D$ ஆகியவற்றுக்கூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டை வரைக. இக்கோடு தேவையான ஒழுக்கு ஆகும்.




### 3. ஒரு நேர்கோட்டிலிருந்து மாறாத் தூரத்தில் அசையும் ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கை அமைத்தல்




தரப்பட்டுள்ள $AB$ என்னும் கோட்டுக்கு 2 cm தூரத்தில் வரையப்பட்ட ஒரு சோடி கோடு உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது. அக்கோடுகளின் மீதுள்ள $P$, $Q$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளைக் கருத்தில் கொள்க. $P$,$Q$ ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து கோடு $AB$ இற்குள்ள தூரம் 2 cm ஆகும். $P$, $Q$ ஆகிய புள்ளிகளை இச்சோடிக் கோடுகளின்மீது எங்கு தெரிந்தெடுத்தாலும் கோடு $AB$ இற்குள்ள தூரம் அதாவது 2 cm மாறாது என்பதை அவதானிக்க.

ஒரு கோட்டுக்குச் சமாந்தரமாக அக்கோட்டுக்கு இரு பக்கங்களிலும் வரையப்பட்டுள்ள ஒரு சோடி கோடு உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது. அவ்வொவ்வொரு கோடும் $AB$ இலிருந்து 2 cm மாறாத்தூரத்தில் அமைந்துள்ளன.

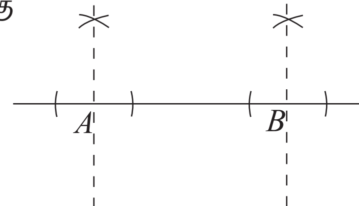
எனவே தரப்பட்ட நேர்கோட்டிற்குச் சமதூரத்தில் அசையும் புள்ளியின் ஒழுக்கானது அந்நேர்கோட்டிற்கு இரு பக்கமும் சமதூரத்தில் வரையப்படும் சமாந்தர கோடுகள் ஆகும்.

தற்போது அவ்வொழுக்கை அமைப்பதற்குத் தரப்பட்ட கோட்டுக்கு இருபக்கமும் வரையப்படும் சமாந்தர கோடுகள் அமைக்கும் முறை பற்றி ஆராய்வோம்.

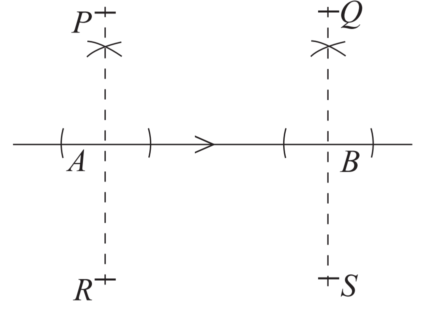
முதலில் தரப்பட்ட கோட்டுத் துண்டம் $AB$ ஐ வரைவோம்.



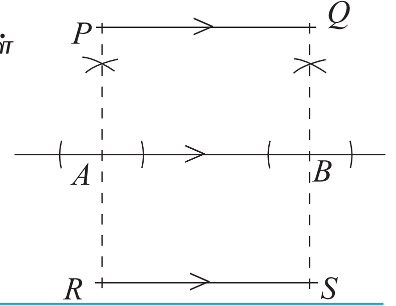

**படிமுறை** 1 $A$, $B$ ஆகிய புள்ளிகளில் கோட்டுக்கு இரண்டு செங்குத்துகள் அமைக்க.



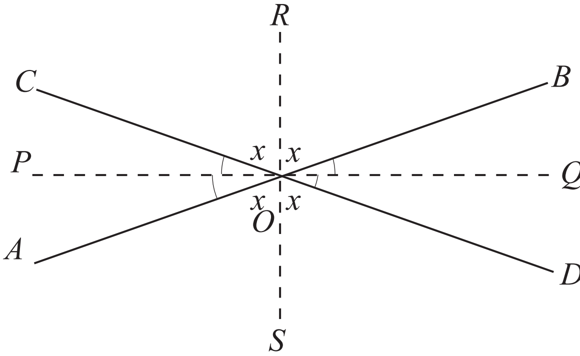
**படிமுறை** 2: அச்செங்குத்துக்களின் மீது கோட்டுக்கு இரு பக்கங்களிலும் தேவையான மாறாத் தூரத்தில் இரண்டு புள்ளிகள் வீதம் குறித்து, அவற்றை உருவிலுள்ளாறு $P, Q, R, S$ எனப் பெயரிடுக.




**படிமுறை** 3 $PQ, RS$ என்பவற்றுக்கூடாக நேர்கோடுகள் வரைக. இக்கோடுகள் இரண்டும் தேவையான ஒழுக்காகும்.



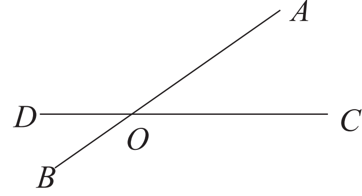

## 4. ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் இரண்டு நேர்கோடுகளிலிருந்து சமனான தூரத்தில் அசையும் ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கை அமைத்தல்.



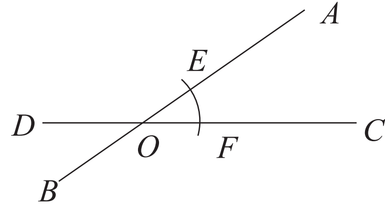

உருவிலுள்ள $AB$, $CD$ ஆகிய நேர்கோடுகள் $O$ இல் இடைவெட்டு கின்றன. $A\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ ஆகிய கோணங்கள் சமனான இரண்டு கோணங்களாகப் பிரிக்கப்படும் வகையில் கோடு $PQ$ வரையப் பட்டுள்ளது. இக்கோடு $PQ$ ஆனது $A\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ ஆகிய கோணங்களின் இருசமகூறாக்கி எனப்படும். இவ்வாறே, $C\hat{O}B$, $A\hat{O}D$ ஆகிய கோணங்கள் சமனான இரண்டு கோணங்களாகப் பிரிக்கப்படும் வகையில் கோடு $RS$ வரையப்பட்டுள்ளது. இக்கோடு $RS$ ஆனது $C\hat{O}B$, $A\hat{O}D$ ஆகிய கோணங்களின் இருசமகூறாக்கி எனப்படும். இனிக் கோடு $PQ$ மீதுள்ள எந்தவொரு புள்ளியிலிருந்தும் கோடு $AB$ இற்கும் $CD$ இற்கும் உள்ள தூரங்கள் சமனானவை என்பதை உங்களால் அவதானிக்க முடியுமா? இவ்வாறே கோடு $RS$ இன் மீதுள்ள எந்தவொரு புள்ளியிலிருந்தும் கோடு $CD$ இற்கும் கோடு $AB$ இற்கும் $CD$ இற்கும் உள்ள தூரங்கள் சமனானவை என்பதைப் புரிந்துகொள்க. மறுதலையாக, இரண்டு கோடுகளுக்கும் சமனான தூரத்தில் யாதாயினுமொரு புள்ளி அமையுமாயின் அப்புள்ளி $PQ$ இன்மீது அல்லது $RS$ இன்மீது அமைய வேண்டும் என்பதை உங்களால் அவதானிக்க முடிகிறதா?

ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் இரண்டு நேர்கோடுகளிலிருந்து சமனான தூரத்தில் அசையும் ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கு, அக்கோடுகள் இரண்டும் இடைவெட்டுவதால் உண்டாகும் கோணங்களின் இருசமகூறாக்கி ஆகும்.

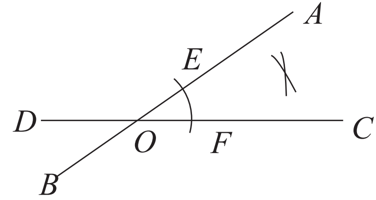
இனி, இவ்வொழுக்கை அமைக்கும் முறையை ஆராய்வோம். $AB$, $CD$ ஆகிய இரண்டு நேர்கோடுகள் $O$ இல் இடைவெட்டுகின்றன என்போம்.



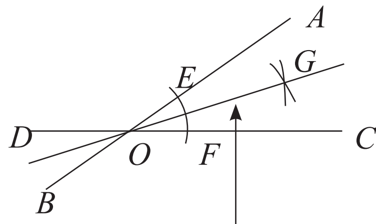

**படிமுறை** 1: கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி $BA$, $DC$ ஆகியவற்றை வெட்டுமாறு $O$ ஐ மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்ட வில் வரைக. வில்லினால் $BA$, $DC$ ஆகிய கோடுகள் இடைவெட்டப்படும் புள்ளிகளை முறையே $E$, $F$ எனப் பெயரிடுக.




**படிமுறை** 2: கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி $E$, $F$ ஆகியவற்றை மையங்களாகக் கொண்டு ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுமாறு இரண்டு வட்ட விற்களை வரைக.




**படிமுறை** 3: வட்ட விற்கள் இரண்டும் இடைவெட்டும் புள்ளியை $G$ எனப் பெயரிட்டு $O,G$ இற்கூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டை வரைக. இவ்வாறே மற்றைய கோண இருசமகூறாக்கியையும் அமைக்க. அப்போது தேவையான ஒழுக்கு இரண்டு கோண இருசமகூறாக்கிகளும் ஆகும்.

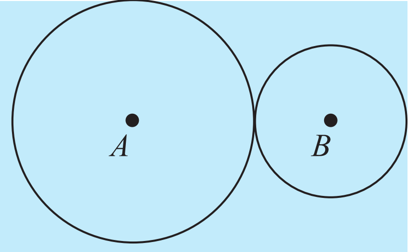



**பயிற்சி** 28.1

**1.** ஒரு கடிகாரத்தின் செக்கன் முள்ளின் நீளம் 3.5 cm ஆயின் கடிகார செக்கன் முள்ளின் முனையின் பயணப் பாதையை வரைக.

**2.** ஒரு கயிற்றினால் மரத்தில் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு மாட்டுக்கும் மரத்துக்குமிடையிலான உச்சத் தூரம் 5 m ஆயின் எப்போதும் மரத்திலிருந்து உச்சத் தூரத்திலிருக்குமாறு மாடு பயணம் செய்யக்கூடிய பயணப் பாதையை வரைக.

**3.** $A$ என்பது 3 cm ஐ ஆரையாகக் கொண்ட நிலையான ஒரு பற்சில்லைச் சுற்றி $B$ ஐ மையமாகக் கொண்ட பற்சில்லு சுழலும் போது மையம் $B$ இன் ஒழுக்கை வரைக.




**4.** (i) $PQ = 5$ cm ஆகவுள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டமொன்றை வரைக. $P,Q$ ஆகியவற்றை மையமாகக் கொண்டு 3 cm ஆரைகளையுடைய இரண்டு வட்டங்களை வரைக.

(ii) இரண்டு வட்டங்களும் இடைவெட்டும் புள்ளிகளை $X$, $Y$ எனப் பெயரிடுக. $XY$ ஐ இணைக்க.

(iii) $PQ$, $XY$ ஆகிய கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியை $S$ எனப் பெயரிட்டு $PS$, $QS$ ஆகியவற்றின் நீளங்களை அளந்து எழுதுக.

(iv) $P\hat{S}X$, $Q\hat{S}X$ ஆகியவற்றின் பருமன்களை அளந்து எழுதுக.

(v) கோடு $XY$ இனால் தரப்படும் ஒழுக்கை விபரிக்க.

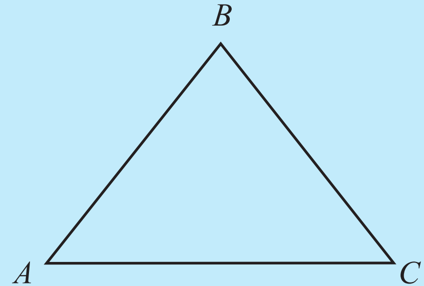
**5.** $AB = 7$ cm ஆகவுள்ள கோடொன்றை அமைத்து அக்கோட்டை சமனான நான்கு பகுதிகளாகப் பிரித்துக் காட்டுக.

**6.** $AB = 5$ cm, $B\hat{A}C = 40^{\circ}$ ஆகவுள்ள $B\hat{A}C$ ஐ வரைக. $A$, $B$ ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து சமனான தூரத்திலுள்ள ஒழுக்கை அமைத்து, அவ்வொழுக்கின் மூலம் கோடு $AC$ ஆனது வெட்டப்படும் புள்ளியை $D$ எனப் பெயரிடுக.

**7.** (i) ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணி $ABC$ ஐ வரைக.

(ii) $A$, $C$ ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து சமனான தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கை அமைக்க.

(iii) $A$, $B$ ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து சமனான தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கை அமைக்க.




(iv) அவ்வொழுக்குகள் இடைவெட்டும் புள்ளியை $O$ எனப் பெயரிடுக. இப்புள்ளி $O$ இலிருந்து $A$, $B$, $C$ ஆகிய புள்ளிகளுக்குள்ள தூரங்கள் பற்றி நீர் யாது கூறலாம்?

**8.** $KL$ என்னும் நேர்கோட்டை வரைக. அந்நேர்கோட்டிலிருந்து 2 cm தூரத்தில் அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கை அமைக்க.

**9.** நீளம் 5 cm உம் அகலம் 3 cm உம் உடைய ஒரு செவ்வகத்தை வரைக. இச் செவ்வகத்தின் பக்கங்களுக்கு வெளியே 2 cm தூரத்தில் அசையும் ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கை அமைக்க.

**10.** கவராயத்தையும் நேர்விளிம்பையும் பயன்படுத்தி கீழே தரப்பட்டுள்ள கோணங்களை அமைத்து, அவற்றின் இருசமகூறாக்கிகளையும் அமைக்க.

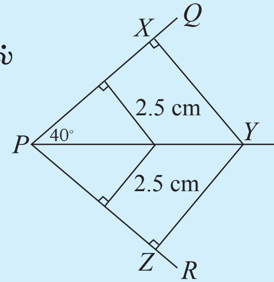
(i) $60^{\circ}$ (ii) $90^{\circ}$ (iii) $120^{\circ}$

**11.** உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

(i) $PQ$, $PR$ ஆகிய கோடுகளிலிருந்து சமனான தூரத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் பெயரிடுக.

(ii) $XY$, $YZ$ ஆகியவற்றுக்கிடையிலுள்ள தொடர்பை எழுதுக.

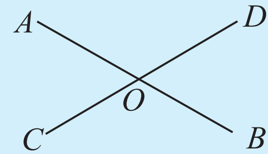
(iii) $R\hat{P}Y$ இன் பெறுமானம் யாது?




**12.** உருவில் தரப்பட்டுள்ள $AB$, $CD$ ஆகிய நேர்கோடுகள் $O$ வில் இடைவெட்டுகின்றன.

(i) $AB$, $CD$ ஆகிய இரண்டு நேர்கோடுகளிலிருந்து சமனான தூரத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கை வரைக.

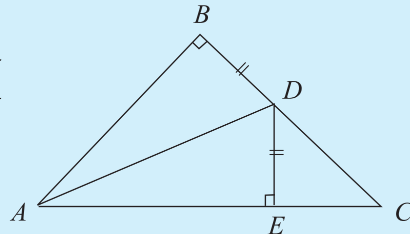
(ii) அவ்வொழுக்கினால் அமையும் இரண்டு கோணங்களினதும் பெறுமானங்கள் யாது?




**13.** உருவில் $A\hat{B}C = A\hat{E}D = 90^{\circ}$ உம் $BD = DE$ உம் ஆகும்.

(i) $AB$, $AC$ ஆகிய கோடுகளிலிருந்து சமனான தூரத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் பெயரிடுக.

(ii) $A\hat{C}B = 40^{\circ}$ ஆயின், $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



## 28.2 முக்கோணி அமைத்தல்

ஒரு முக்கோணிக்கு மூன்று பக்கங்களும் மூன்று கோணங்களும் உள்ளன. ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களும் கோணங்களும் அதன் உறுப்புகள் எனப்படும். பக்கங்களின் நீளங்கள், கோணங்களின் பருமன்கள் என்பன தரப்படும்போது ஒரு முக்கோணியை அமைக்கக்கூடிய சில சந்தர்ப்பங்கள் பற்றிக் கற்போம்.

1. **மூன்று பக்கங்களின் நீளங்கள் தரப்படும்போது**

**உதாரணம் 1**

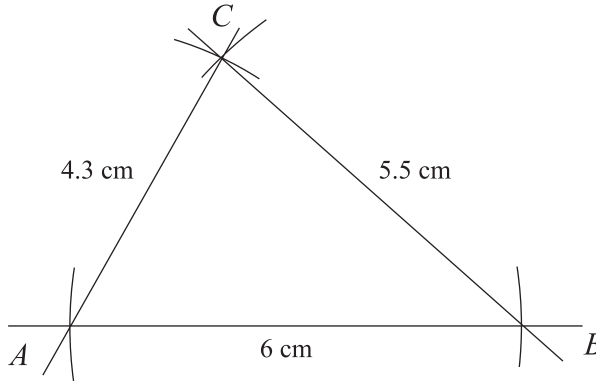
$AB = 6$ cm , $BC = 5.5$ cm, $AC = 4.3$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி $ABC$ ஐ அமைக்க.

**படிமுறை** 1: 6 cm நீளமுடைய ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை அமைத்து $AB$ எனப் பெயரிடுக.

**படிமுறை** 2: $B$ ஐ மையமாகக் கொண்டு 5.5 cm ஆரையுள்ள ஒரு வட்ட வில்லை (போதிய நீளமுடையதாக) வரைக.

**படிமுறை** 3: மேலே படிமுறை 2 இல் அமைத்த வட்ட வில்லை இடைவெட்டுமாறு $A$ ஐ மையமாகக் கொண்டு 4.3 cm ஆரையுடைய இன்னுமொரு வட்ட வில்லை வரைக.

**படிமுறை** 4: இரண்டு விற்களும் இடைவெட்டக்கூடிய புள்ளியை $C$ எனப் பெயரிட்டு $AC$ , $BC$ ஆகியவற்றை இணைப்பதன் மூலம் முக்கோணி $ABC$ ஐப் பூர்த்திசெய்க.




2. **இரண்டு பக்கங்களின் நீளமும் அடைகோணமும் தரப்பட்டுள்ளபோது**

**உதாரணம் 2**

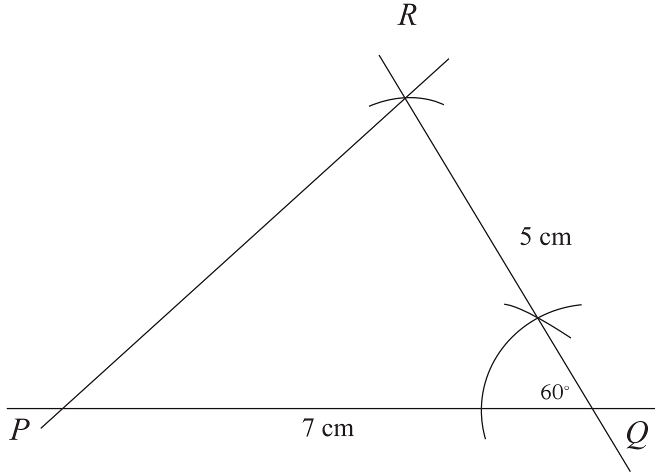
$PQ = 7$ cm , $QR = 5$cm , $P\hat{Q}R = 60^\circ$ ஆகவுள்ள முக்கோணி $PQR$ ஐ அமைக்க.

**படிமுறை** 1: 7 cm கோட்டுத் துண்டமொன்றை அமைத்து அதற்கு $PQ$ எனப் பெயரிடுக.

**படிமுறை** 2: $Q$ வில் $60^\circ$ கோணமொன்றை அமைக்க.

**படிமுறை** 3: இக்கோணத்தின் $PQ$ அல்லாத மற்றைய புயத்தில் 5 cm ஆரையுள்ள வில்லை அமைக்க. வில் புயத்தை இடைவெட்டும் புள்ளியை $R$ எனக் குறிக்க.

**படிமுறை** 4: $PR$ ஐ இணைத்து முக்கோணி $PQR$ ஐப் பூரணப்படுத்துக.




**3. இரண்டு கோணங்களின் பெறுமானங்களும் ஒரு பக்கத்தின் நீளமும் தரப்படும் போது**

**உதாரணம்** 3

$XY = 6.5$ cm , $X\hat{Y}Z = 45^\circ$ , $Y\hat{X}Z = 60^\circ$ ஆகவுள்ள முக்கோணி $XYZ$ ஐ அமைக்க.

**படிமுறை** 1: 6.5 நீளமுடைய ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டம் அமைத்து அதனை $XY$ எனப் பெயரிடுக.

**படிமுறை** 2: $Y$ இல் $X\hat{Y}A = 45^\circ$ ஆகுமாறு $X\hat{Y}A$ ஐ அமைக்க.

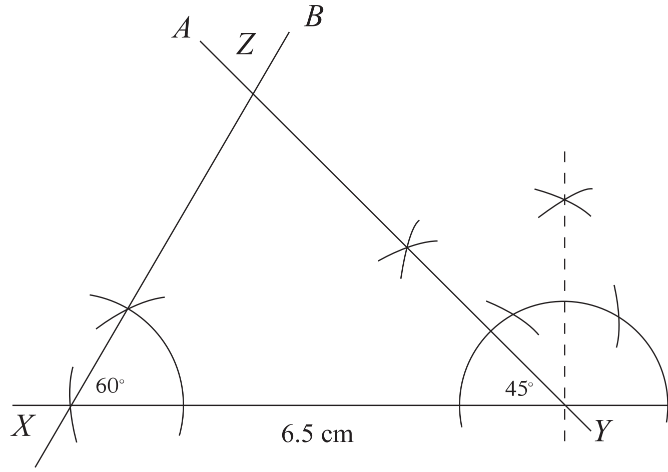
**படிமுறை** 3: $X$ இல் $Y\hat{X}B = 60^\circ$ ஆகுமாறு $Y\hat{X}B$ ஐ அமைக்க.

**படிமுறை** 4: $YA$ , $XB$ ஆகிய கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியை $Z$ எனப் பெயரிடுக. அப்போது $\Delta XYZ$ என்பது தேவையான முக்கோணியாகும்.

---

குறிப்பு: மேலே உள்ள உதாரணத்தில் ஒரு பக்கத்தின் நீளமும் அப்பக்கத்தின் இரு முனைகளிலும் உச்சிகளாக அமைந்துள்ள கோணங்களும் தரப்பட்டிருந்தன. இரண்டு முனைகளிலும் ஒரு கோணம் தரப்படாதவிடத்து நாம் அவ்வுச்சியிலுள்ள கோணத்தின் பருமனைக் காண வேண்டும். ( ஒரு முக்கோணியின் மூன்று கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை $180^\circ$ என்பதிலிருந்து).

---




**பயிற்சி 28.2**

**1.** ஒரு பக்க நீளம் 6 cm ஆகவுள்ள சமபக்க முக்கோணி $ABC$ ஐ அமைக்க.

**2.** $PQ = 8$ cm, $RQ = QR = 6$ cm ஆகவுள்ள இருசமபக்க முக்கோணி $PQR$ ஐ அமைக்க.

**3.** (i) $KL = 7.2$ cm, $LM = 6.5$ cm, $KM = 5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி $KLM$ ஐ அமைக்க.

(ii) முக்கோணியின் ஒவ்வொரு கோணத்தின் பருமனையும் அளந்து எழுதுக.

**4.** (i) $AB = 6$ cm, $A\hat{B}C = 90^\circ$, $BC = 4$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி $ABC$ ஐ அமைக்க.

(ii) பக்கம் $AC$ இன் நீளத்தை அளந்து எழுதுக.

(iii) $AB, BC, AC$ ஆகிய பக்கங்களுக்கிடையே உள்ள ஒரு தொடர்பை எழுதுக.

(iv) அதிலிருந்து $\sqrt{52}$ இற்கான ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைப் பெறுக.

**5.** (i) $XY = 5$ cm, $X\hat{Y}Z = 75^\circ$, $YZ = 6$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி $XYZ$ ஐ அமைக்க.

(ii) பக்கம் $XZ$ இன் நீளத்தை அளந்து எழுதுக.

(iii) $Y\hat{X}Z$ இன் பெறுமானத்தை அளந்து எழுதுக.

**6.** (i) $RS = 6.5$ cm, $S\hat{R}T = 120^\circ$, $RT = 5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி $SRT$ ஐ அமைக்க.

(ii) பக்கம் $SR$ இற்குச் சமாந்தரமாக $T$ இனூடாக ஒரு கோட்டை அமைக்க.

7. $DE = 6.8$ cm, $D\hat{E}F = 60^\circ$, $E\hat{D}F = 90^\circ$ ஆகவுள்ள முக்கோணி $DEF$ ஐ அமைக்க.

8. (i) $AB = 6$ cm, $A\hat{B}C = 105^\circ$, $BC = 4.5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி $ABC$ ஐ அமைக்க.
   (ii) அதிலிருந்து இணைகரம் $ABCD$ ஐ அமைக்க.
   (iii) மூலைவிட்டம் $AC$ இன் நீளத்தை அளந்து எழுதுக.

9. (i) $QR = 7$ cm, $Q\hat{R}P = 60^\circ$, $Q\hat{P}R = 75^\circ$ ஆகவுள்ள முக்கோணி $PQR$ ஐ அமைக்க.
   (ii) $P$ இலிருந்து $QR$ இற்குச் செங்குத்தை அமைத்து அதன் அடியை $S$ எனப் பெயரிடுக.
   (iii) $PS$ இன் நீளத்தை அளந்து எழுதுக.

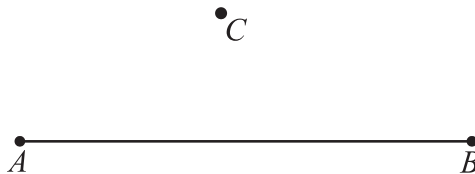
10. (i) $KL = 6.5$ cm, $K\hat{L}M = 75^\circ$, $LM = 5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி $KLM$ ஐ அமைக்க.
   (ii) $K$, $M$ ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து சமனான தூரத்தில் அமையுமாறும் $MN = 4$ cm ஆகுமாறும் புள்ளி $N$ ஐக் கண்டு நாற்பக்கல் $KLMN$ ஐ அமைக்க.
   (iii) $L\hat{K}N$ இன் பெறுமானத்தை அளந்து எழுதுக.

## 28.3 சமாந்தர கோடுகள் தொடர்பான அமைப்புகள்

மூலைமட்டத்தையும் நேர்விளிம்பையும் பயன்படுத்தி சமாந்தர கோடுகளை அமைக்கும் முறையை இதற்கு முன்னர் நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். இனிக் கவராயத்தையும் நேர்விளிம்பையும் பயன்படுத்தி சமாந்தர கோடுகளை அமைக்கும் முறையைக் கற்போம்.

**1. ஒரு நேர் கோட்டுக்குப் புறத்தே அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளிக்கூடாக அக்கோட்டுக்கு சமாந்தரமாக ஒரு கோட்டை அமைத்தல்.**

**முறை** 1 ஒத்த கோணங்களைப் பயன்படுத்தல்.
தரப்பட்டுள்ள கோடு $AB$ எனவும் புறத்தே உள்ள புள்ளி $C$ எனவும் கொள்வொம்.



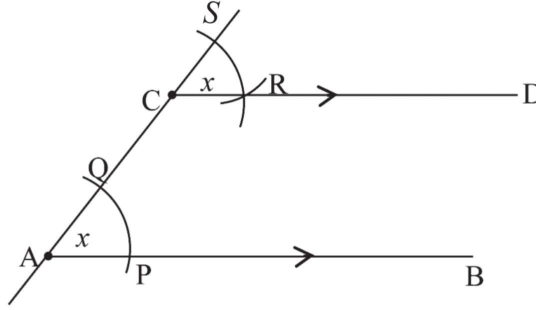
**படிமுறை** 1 $A$, $C$ ஐ இணைக்க.

**படிமுறை** 2 $A$ ஐ மையமாகக் கொண்டு $B\hat{A}C$ இன் மீது ஒரு வட்ட வில்லை வரைக. அதனை $PQ$ எனப் பெயரிடுக.

**படிமுறை** 3 அதே ஆரையுடன் (அதாவது கவராயத்தின் நீளத்தை மாற்றாது) $C$ ஐ மையமாக் கொண்டு உருவிலுள்ளவாறு மேலுமொரு வட்ட வில்லை வரைக.

**படிமுறை** 4 $PQ$ வின் நீளத்திற்கு சமனான $SR$ இன் நீளத்தை இரண்டாவது வட்ட வில்லின்மீது உருவிலுள்ளவாறு குறிக்க.

**படிமுறை** 5 $CR$ ஐ இணைத்து கோடு $CD$ ஐ வரைக. அப்போது பெறப்படும் கோணம் $SCD$ ஆனது $B\hat{A}C$ இற்குச் சமனான ஓர் ஒத்த கோணம் என்பதால் $AB$ , $CD$ ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமானவை ஆகும்.




**முறை** 2 ஒன்றுவிட்ட கோணங்களைப் பயன்படுத்தல்.
தரப்பட்டுள்ள கோடு $AB$ எனவும் புறத்தே உள்ள புள்ளி $C$ எனவும் கொள்வோம்.

C



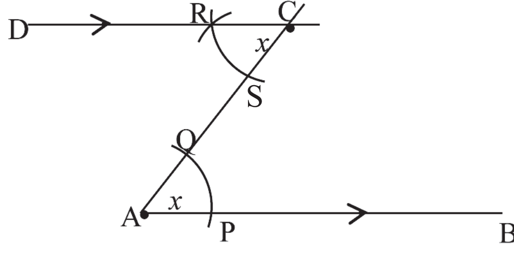

**படிமுறை** 1: $AC$ ஐ இணைக்க.

**படிமுறை** 2: $A$ ஐ மையமாகக் கொண்டு $B\hat{A}C$ இன்மீது ஒரு வில்லை வரைக. அதனை $PQ$ எனப் பெயரிடுக.

**படிமுறை** 3 வட்ட வில் $PQ$ இன் ஆரைக்கு சமனான ஒரு வட்ட வில்லை $C$ ஐ மையமாகக் கொண்டு $AC$ ஐ இடைவெட்டுமாறு வரைக.

**படிமுறை** 4 $PQ$ இற்குச் சமனான ஒரு நீளத்தை இரண்டாவது வில்லின்மீது குறிக்க. இடைவெட்டும் புள்ளியை $R$ எனப் பெயரிடுக.

**படிமுறை** 5 $CR$ ஐ இணைத்து கோடு $CD$ ஐ வரைக. அப்போது பெறப்படும் கோணம் $DCA$ ஆனது $B\hat{A}C$ இற்குச் சமனான ஓர் ஒன்றுவிட்டகோணம் என்பதால் $AB$, $CD$ ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமானவையாகும்.




**முறை** 3 தரப்பட்டுள்ள கோடு $AB$ எனவும் புறத்தே உள்ள புள்ளி $C$ எனவும் கொள்வோம்.



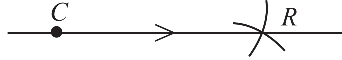

**படிமுறை** 1: கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி $C$ ஐ மையமாகக் கொண்டு கோடு $AB$ இடைவெட்டப்படும் வகையில் ஒரு வில்லை வரைக. இடைவெட்டும் புள்ளியை $P$ எனப் பெயரிடுக.

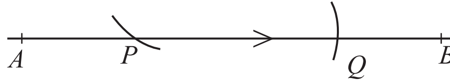
**படிமுறை** 2: முதலில் எடுத்த அதே ஆரையை எடுக்க. ( அதாவது $CP$ இன் நீளம்) $P$ ஐ மையமாகக் கொண்டு இன்னுமொரு வில் $AB$ இனை வெட்டுமாறு வரைக.

**படிமுறை** 3 இரண்டாவது இடைவெட்டும் புள்ளியை $Q$ எனக் கொண்டு $Q$ ஐ மையமாக் கொண்டு முன்னைய ஆரையையுடைய இன்னுமொரு வட்ட வில்லை $C$ அமைந்துள்ள பக்கத்தில் வரைக.

**படிமுறை** 4: பின்னர் $C$ ஐ மையமாக் கொண்டு முன்னைய ஆரையில் (மூன்றாவது வட்ட வில்) இடைவெட்டும் புள்ளியை $R$ எனப் பெயரிடுக.

**படிமுறை** 5: $CR$ ஐ இணைக்க. அப்போது கோடு $CR$ ஆனது கோடு $AB$ இற்குச் சமாந்தரமானது ஆகும்.




**செயற்பாடு**

சமாந்தர கோடுகள் தொடர்பான அமைப்புகளின் மேலதிக விளக்கத்தைப் பெற்றுக் கொள்வதற்காக இச்செயற்பாட்டைச் செய்வோம்.

1. $AB = 8$ cm ஆகுமாறு கோட்டுத் துண்டம் $AB$ ஐ வரைக. $A$ ஐ உச்சியாகக் கொண்டு $60^\circ$ கோணத்தை அமைக்க. $AC = 5$ cm ஆகுமாறு இணைகரம் $ABDC$ ஐப் பூரணப்படுத்துக.

2. 4 cm இடைத்தூரத்தில் உள்ளவாறு இரண்டு சமாந்தர கோடுகளை வரைக. $AB = 7$ cm ஆகுமாறு இச்சமாந்தர கோடுகளில் ஒரு கோட்டில் $A$, $B$ என்னும் புள்ளிகளைக் குறிக்க. $AD = 5$ cm ஆகுமாறு மற்றைய கோட்டில் $D$ ஐக் குறிக்க. இணைகரம் $ABDC$ ஐப் பூரணப்படுத்துக.

3. 4 cm இடைத்தூரத்தில் இரண்டு சமாந்தர கோடுகளை வரைக. $AB = 7$ cm ஆகுமாறு இச்சமாந்தர கோடுகளில் ஒன்றில் $A$, $B$ ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்க. $BC = 5$ cm ஆகுமாறு $C$ ஐ மற்றைய கோட்டில் குறிக்க. அதேகோட்டில் $DC = 4$ cm ஆகுமாறு புள்ளி $D$ ஐ குறிக்க. தற்போது நாற்பக்கல் $ABCD$ ஐப் பூரணப்படுத்துக. இந்நாற்பக்கல் $ABCD$ ஒரு சரிவகம் என்பதை அவதானிக்கவும்.

**பயிற்சி 28.3**

**1.** ஒரு கூர்ங்கோணத்தை வரைந்து $A\hat{B}C$ எனப் பெயரிடுக. $C$ இற்கூடாக $AB$ இற்குச் சமாந்தரமான கோடொன்றை அமைக்க.

**2.** விரிகோணமொன்றை வரைந்து $P\hat{Q}R$ எனப் பெயரிடுக. $PQ$ இற்கு சமாந்தரமாக $R$ இற்கூடாகக் கோடொன்றை அமைக்க.

**3** ஒரு பக்க நீளம் 6 cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுரத்தை அமைக்க.

**4.** நீளம் 6.5 cm அகலம் 4 cm ஆகவுள்ள ஒரு செவ்வகத்தை அமைக்க. அதனை $ABCD$ எனப் பெயரிடுக. மூலைவிட்டம் $AC$ இற்குச் சமாந்தரமான 2 நேர்கோடுகளை $B$, $D$ ஊடாக அமைக்க.

**5.** $AB = 6$ cm, $A\hat{B}C = 120^\circ$, $BC = 5$ cm இணைகரம் $ABCD$ ஐ அமைக்க.

**6.** $KL = 7$ cm, $K\hat{L}M = 60^\circ$ ஆகவுள்ள சாய்சதுரம் $KLMN$ ஐ அமைக்க.

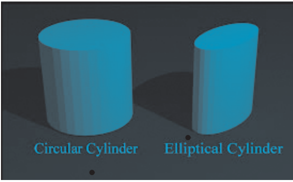
**7.** (i) ஆரை 3 cm ஆகவுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து மையத்தை $O$ எனப் பெயரிடுக.
(ii) அதில் 4 cm நீளமுடைய ஒரு நாண் வரைந்து $PQ$ எனப் பெயரிடுக.
(iii) $PO$ ஐ இணைத்து அது மீண்டும் வட்டத்தை $R$ இல் சந்திக்குமாறு நீட்டுக.
(iv) $R$ இற்கூடாக $PQ$ இற்குச் சமாந்தர கோடொன்றை அமைக்க.

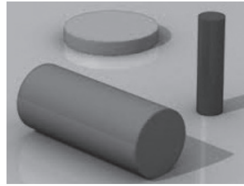
# 29 மேற்பரப்பளவும் கனவளவும்

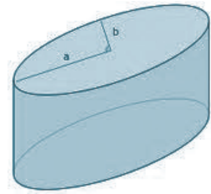
இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,
- ஒரு செவ்வட்ட உருளையின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவையும் கனவளவையும் கணிப்பதற்கும்
- குறுக்கு வெட்டு முகம் முக்கோணியாகவுள்ள செவ்வரியத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவையும் கனவளவையும் கணிப்பதற்கும்

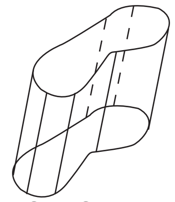
தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

## உருளை

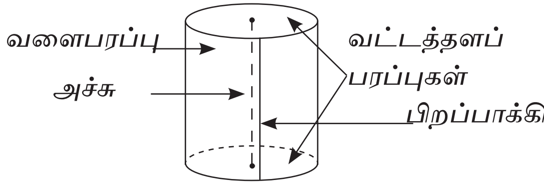




மேலே காணப்படும் திண்மங்களின் குறுக்குவெட்டு சீராக இருக்கும் அதே வேளை இரு முனைகளிலும் உள்ள தளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரம் ஆகும். இத்தகைய வடிவமுள்ள திண்மங்கள் பொதுவாக **உருளைகள்** எனப்படும்.



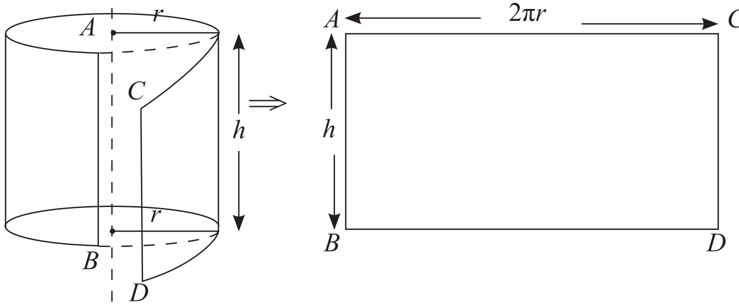

உருவில் காணப்படுகின்றவாறு உருளையின் மேல், கீழ் வட்டத் தளப்பரப்புகள் (முகங்கள்) 2 உள்ளன. அதற்கு மேலதிகமாக ஒரு வளைபரப்பும் உள்ளது. வட்டத் தளப்பரப்புகள் இரண்டினதும் ஆரைகள் சமம். ஆகவே அத் தளங்கள் இரண்டினதும் பரப்பளவுகள் சமமாகும். இவ்வட்டங்களின் மையங்களைத் தொடுக்கும் கோடு உருளையின் அச்சு எனப்படும். வளைப்பரப்பின் மீது உருளையின் அச்சிற்குச் சமாந்தரமாக இருக்கும் எந்தக் கோடும் உருளையின் பிறப்பாக்கி எனப்படும்.

உருளையின் அச்சு இரு வட்டத் தளப்பரப்புகளுக்கும் செங்குத்தானது. ஆகவே, இத்தகைய உருளைகள் **செவ்வட்ட உருளைகள்** எனப்படும். (செவ்வட்டம் அல்லாத உருளைகளும் உண்டு. அவை பற்றி இங்கு ஆராயப்படமாட்டாது). இங்கு ''செவ்'' என்பது உருளையின் இரு தளமுகங்களும் அச்சிற்குச் செங்குத்து என்பதைக் குறிக்கின்றது. வட்டமானது உருளையின் அச்சிற்குச் செங்குத்தான குறுக்கு வெட்டு வட்டம் ஆகும் என்பதைக் கருதுகின்றது.

உருளையின் ஒரு வட்ட முகத்தின் ஆரை $r$ இனாலும் உருளையின் அச்சின் நீளம் $h$ இனாலும் பொதுவாகக் காட்டப்படுகின்றது. இந்த $r$ ஆனது உருளையின் ஆரை எனவும் $h$ ஆனது உருளையின் உயரம் எனவும் கூறப்படும்.

## 29.1 ஒரு செவ்வட்ட உருளையின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

ஓர் உருளையின் ஆரையும் உயரமும் தரப்படும்போது அதன் மொத்தப் பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கு அதன் மூன்று பரப்புகளினதும் பரப்பளவுகளைக் கண்டு கூட்டுத்தொகையைக் காண வேண்டும். ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி இரு முனைகளிலும் உள்ள வட்ட முகங்கள் இரண்டினதும் பரப்பளவைக் கணிக்கலாம். வளைபரப்பின் பரப்பளவைக் கணிப்பதற்குப் பின்வருமாறு ஓர் உத்தியைப் பயன்படுத்தலாம்.




உருவில் காணப்படுகின்றவாறு உருளையின் ஒரு பிறப்பாக்கி வழியே வளைபரப்பை வெட்டி விரிக்கும்போது எமக்கு ஒரு செவ்வகம் கிடைக்கின்றது. அதன் ஒரு பக்க நீளம் உருளையின் உயரம் $h$ இற்குச் சமமாக இருக்கும் அதே வேளை மற்றைய பக்கம் வட்டத்தளப் பகுதியின் பரிதிக்குச் சமமானதாகும்.

இச்செவ்வகத்தின் பரப்பளவு உருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவிற்குச் சமம். இதற்கேற்ப பின்வருமாறு உருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்குரிய ஒரு கோவையை உருவாக்கலாம்.

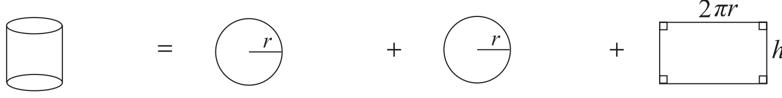
உருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு = செவ்வகப் பகுதியின் நீளம் $\times$ செவ்வகப் பகுதியின் அகலம்

$= 2\pi r \times h$

$\therefore$ உருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= 2\pi rh$

இப்போது நாம் உருளையின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

உருளையின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு = மேல் முகத்தின் பரப்பளவு + கீழ் முகத்தின் பரப்பளவு + வளைபரப்பின் பரப்பளவு




A = $\pi r^2$ + $\pi r^2$ + $2\pi rh$

| A = $2\pi r^2 + 2\pi rh$ |
|---|

**குறிப்பு :**

(i) மூடி இல்லாத ஓர் உருளைப் பொருளின் வெளிமேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= \pi r^2 + 2\pi rh$

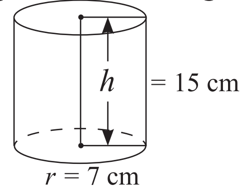
(ii) மூடியும் அடியும் இல்லாத ஓர் உருளைப் பொருளின் வெளிமேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 2\pi rh$

ஓர் உருளையின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காணல் தொடர்பான சில பிரசினங்களில் இப்போது கவனஞ் செலுத்துவோம்.

**உதாரணம் 1**

அடியின் ஆரை 7 cm ஆகவும் உயரம் 15 cm ஆகவும் உள்ள ஓர் உருளை மரக்குற்றியின்

(i) ஒரு தள முகத்தின் பரப்பளவு
(ii) வளைபரப்பின் பரப்பளவு
(iii) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு




(i) ஒரு தள முகத்தின் பரப்பளவு $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 154 \text{ cm}^2$

(ii) வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 15$

$= 660 \text{ cm}^2$

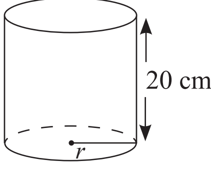
(iii) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$= 2 \times (154) + 660$

$= 308 + 660$

$= 968 \text{ cm}^2$

**உதாரணம் 2**




மூடி இல்லாத உயரம் 20 cm உம் $r$ cm ஆரையுள்ள ஓர் உருளைப் பாத்திரத்தின் அடியின் பரிதி 88 cm ஆகும்.

(i) அடியின் ஆரையைக் காண்க.

(ii) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

(i)

$$\text{அடியின் பரிதி} = 2\pi r$$

$$\therefore 2\pi r = 88$$

$$\therefore \quad r = \frac{88}{2\pi} = \frac{88\times 7}{2\times 22}$$

$$r = 14\text{ cm}$$

(ii) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= \pi r^2 + 2\pi rh$

$$= \frac{22}{7}\times 14\times 14 + 2\times \frac{22}{7}\times 14\times 20$$

$$= 616 + 1760$$

$$= 2376\text{ cm}^2$$

உதாரணம் 3

ஓர் உலோகத் திண்ம உருளையின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 2442 cm$^2$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை அதன் ஆரையினதும் உயரத்தினதும் கூட்டுத்தொகை 37 cm ஆகும். அவ்வுருளையின்

(i) ஆரையைக் காண்க.

(ii) வளைபரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

குறுக்கு வெட்டு ஆரையை $r$ இனாலும் உயரத்தை $h$ இனாலும் காட்டுவோம்.

(i) ஆரையினதும் உயரத்தினதும் மொத்தம் = 37 cm

$$\text{அதாவது} \quad r + h = 37\text{cm}$$

$$\text{மொத்தப் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2442\text{cm}^2$$

$$\therefore 2\pi r(r+h) = 2442$$

$$\therefore 2\pi r(37) = 2442 \quad (r + h = 37 \text{ ஐப் பிரதியிடுவோம்})$$

$$\therefore r = \frac{2442\times 7}{2\times 22\times 37}$$

$$= 10.5$$

$$\therefore \text{ஆரை } r = 10.5\text{ cm}$$

(ii) $r + h = 37\text{cm}$

$r = 10.5\text{cm}$ ஆகையால் $h = 37 - 10.5$

$= 26.5 \text{ cm}$

$\therefore$ வளைப்பரப்பின் பரப்பளவு $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 10.5 \times 26.5$

$= 1749 \text{ cm}^2$

**பயிற்சி 29.1**

**1.** ஓர் உருளையின் ஆரை 7 cm உம் உயரம் 12 cm உம் ஆகும்.

(i) இரு வட்ட முகங்களினதும் பரப்பளவு

(ii) வளைபரப்பின் பரப்பளவு

(iii) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு என்பவற்றைக் காண்க.

**2.** ஆரை 3.5 cm ஐயும் உயரம் 10 cm ஐயும் உடைய மூடி இல்லாத உருளைத் தகரப் பேணிகள் 200 ஐச் செய்வதற்குத் தேவையான உலோகத் தகட்டின் பரப்பளவைக் காண்க.

**3.** மூடி உள்ள ஓர் உருளை வடிவப் பாத்திரத்தின் மொத்தப் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 5 412 $\text{cm}^2$ ஆகும். அதன் வளைபரப்பின் பரப்பளவு 2 640 $\text{cm}^2$ எனின்,

(i) இரு வட்டப் பரப்புகளினதும் மொத்தப் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) உருளையின் ஆரையைக் காண்க.

(iii) உருளையின் உயரத்தைக் காண்க.

**4.** மெல்லிய தகட்டினால் செய்யப்பட்ட மூடி உள்ள ஓர் உருளைப் பாத்திரத்தின் அடியின் பரிதி 88 cm ஆகும். அதன் வளைபரப்பின் பரப்பளவு 1078 $\text{cm}^2$ எனின் பாத்திரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

**5.** ஓர் உருளைத் தகரப் பேணியின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு 990 $\text{cm}^2$ ஆகும்.

(i) அதன் உயரம் 15 cm எனின் அடியின் ஆரையைக் காண்க.

(ii) இரு வட்ட முகங்களினதும் மொத்தப் பரப்பளவைக் காண்க.

(iii) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

**6.** ஒரு வீட்டின் முன் பக்கமாகவுள்ள விறாந்தையானது 3 m உயரமும் 28 cm விட்டமும் உடைய 10 உருளைத் தூண்களைக் கொண்டுள்ளது. இத்தூண்களுக்குத் தீந்தை பூச உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ளது. அதற்காக 1 லீற்றரில் 13.5 $\text{m}^2$ இற்கு பூசக் கூடிய தீந்தை பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

(i) பத்து தூண்களினதும் வளைபரப்பின் பரப்பளவைக் கிட்டிய முழு எண்ணிற்குக் காண்க.

(ii) தேவையான தீந்தையின் அளவை லீற்றரில் காண்க.

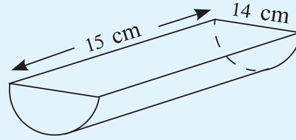
(iii) ஒரு லீற்றர் தீந்தையின் விலை ரூ. 450 எனின் தீந்தைக்காகச் செலவிடப்படும் பணத்தைக் காண்க.

**7.** ஆரை 7 cm உம் உயரம் 10 cm உம் உள்ள உணவு பொதிசெய்த ஒரு செவ்வுருளைப் பாத்திரத்தின் வளைபரப்பை ஒரு சுட்டுத் துண்டினால் முற்றாக மூடுதல் வேண்டும்.

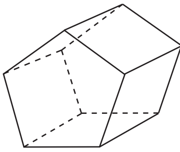
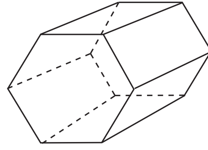
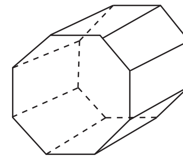
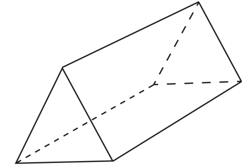
(i) தாள் வீணாவதை இழிவளவாக்குமாறு 180 cm நீளமும் 90 cm அகலமும் உள்ள மிக மெல்லிய தாளைப் பயன்படுத்தி எத்தனை சுட்டுத் துண்டுகளை வெட்டலாம்?

(ii) 1200 பாத்திரங்களில் ஒட்டத் தேவையான சுட்டுத் துண்டுகளை வெட்டத் தேவையான அத்தகைய எத்தனை தாள்கள் தேவையெனக் கணிக்க.

**8.** கீழே தரப்பட்டுள்ள திண்ம அரை உருளையின் மொத்த மேற்பரப்பளவைக் காண்க.



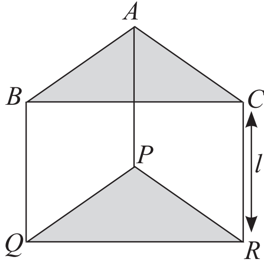

## அரியம்

மேலே காணப்படும் திண்மங்களுக்குப் பின்வரும் பொது இயல்புகள் உள்ளன.

- ★ குறுக்குவெட்டு சீரானதாகும்
- ★ குறுக்குவெட்டு பல்கோணியாகும்
- ★ பக்க முகங்கள் செவ்வகமாகும்.
- ★ இரு பக்கங்களிலும் இருக்கும் பல்கோணி முகங்களுக்குப் பக்க முகங்கள் செங்குத்தாகும்.

இத்தகைய இயல்புகள் உள்ள திண்மங்கள் செவ்வரியங்கள் எனப்படும். இச்செவ்வரியங்களில் குறுக்குவெட்டு முக்கோணியாக உள்ள செவ்வரியங்கள் பற்றி நாம் மேலும் கற்போம்.




உருவில் குறுக்குவெட்டு முக்கோணியாக உள்ள ஒரு செவ்வரியம் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது. இங்கு

(1) $ABC$, $PQR$ ஆகியவற்றினால் அரியத்தின் இரு பக்கங்களிலும் உள்ள முக்கோண முகச் சோடி வகைகுறிக்கப்படுகின்றது.

(2) $BQRC$, $CRPA$, $APQB$ ஆகியவற்றினால் மூன்று செவ்வக முகங்கள் வகைகுறிக்கப்படுகின்றன. (இம்முகங்கள் பக்க முகங்கள் எனவும் வரையறுக்கப்படும்.)

(3) முக்கோண முகங்கள் இரண்டிற்குமிடையே உள்ள தூரம் அரியத்தின் நீளம் அல்லது உயரம் எனப்படும் அதே வேளை அது $l$ மூலம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

(4) முக்கோண முகச் சோடியினதும் மூன்று செவ்வக முகங்களினதும் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகை அரியத்தின் மேற்பரப்புகளினதும் பரப்பளவாகும்.

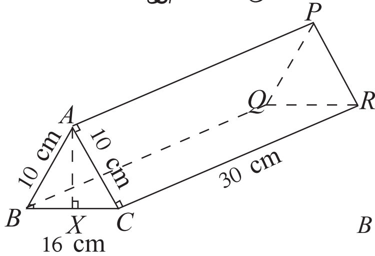
## 29.2 முக்கோண வடிவ குறுக்குவெட்டுடைய செவ்வரியமொன்றின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காணல்.

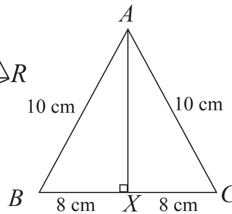
குறுக்குவெட்டு இரு சமபக்க முக்கோணியாகவுள்ள ஒரு செவ்வரியத்தில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கு ஏற்ப மொத்தப் பரப்பின் பரப்பளவைக் காணும் விதத்தைப் பார்ப்போம்.

**உதாரணம்** 1

ஒரு முக்கோணி முகம் $ABC$ யின் பரப்பளவை முதலில் காண்போம். அதற்காக $A$ யிலிருந்து பக்கம் $BC$ யிற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துத் தூரத்தைக் காண்போம்.

இரு சமபக்க முக்கோணிகளின் இயல்புகளுக்கேற்ப $BC$ யின் நடுப் புள்ளி $X$ எனின் $AX \perp BC$ இப்போது $AXC$ யிற்குப் பைதகரசின் தோற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது




$$AC^2 = AX^2 + XC^2$$
$$10^2 = AX^2 + 8^2$$
$$100 - 64 = AX^2$$
$$\therefore 36 = AX^2$$
$$\therefore AX = \sqrt{36}$$
$$\therefore AX = 6\text{ cm}$$

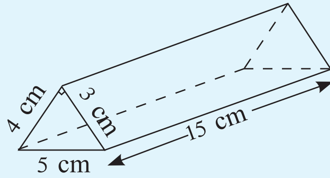
ஆகவே முக்கோணி $ABC$ பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 16\text{ cm} \times 6\text{ cm} = 48\text{ cm}^2$

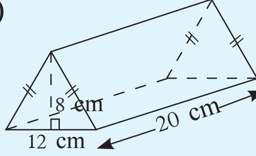
$\therefore ABC$ , $PQR$ ஆகிய முக்கோண முகங்களின்
பரப்பளவு $= 2 \times 48\ \text{cm}^2$
$= 96\ \text{cm}^2$

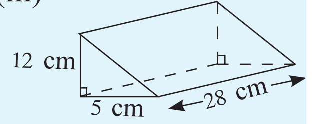
இப்போது செவ்வக முகம் $ACRP$ இன் பரப்பளவு $= 10\ \text{cm} \times 30\ \text{cm} = 300\ \text{cm}^2$
செவ்வக முகம் $APQB$ வின் பரப்பளவு $= 10\ \text{cm} \times 30\ \text{cm} = 300\ \text{cm}^2$
செவ்வக முகம் $BCRQ$ வின் பரப்பளவு $= 16\ \text{cm} \times 30\ \text{cm} = 480\ \text{cm}^2$
$\therefore$ அரியத்தின் மொத்த மேற்பரப்பளவு $= 96 + 300 + 300 + 480$
$= 1176\ \text{cm}^2$

**பயிற்சி 29.2**

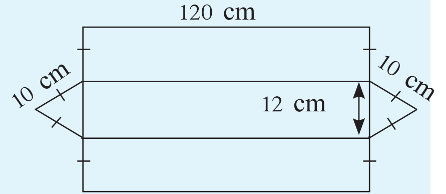
**1.** பின்வரும் அரியங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

(i)


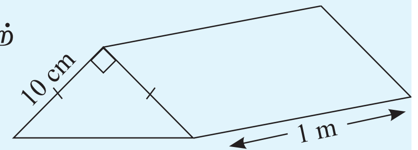

(ii)



(iii)


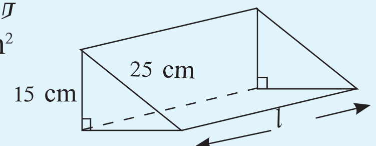

**2.** பின்வரும் அளவீடுகள் உள்ள வலையைப் பயன்படுத்திச் செய்யத்தக்க ஒரு முக்கோண செவ்வரியத்தின் மொத்த மேற்பரப்பளவைக் காண்க.




**3.** உருவில் காணப்படும் அரியத்தின் மொத்த மேற் பரப்பளவைக் காண்க.

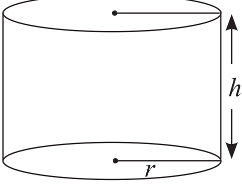



4. உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு திண்ம மர வரியத்தின் மொத்த மேற்பரப்பளவு 2100 $\text{cm}^2$ எனின், அரியத்தின் நீளம் $l$ ஐக் காண்க.



## 29.3 ஓர் உருளையின் கனவளவு

இதற்கு முந்திய தரங்களில் நீங்கள் கற்ற சீரான குறுக்குவெட்டுள்ள திண்மங்களின் கனவளவைக் கணித்த விதத்தை நினைவுகூர்க. அதில் நீங்கள் அத்திண்மத்தின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பளவை உயரத்தினாற் பெருக்கிக் கனவளவைக் கணித்தீர்கள். அவ்வாறே நாம் குறுக்கு வெட்டு வட்டமாக உள்ள ஒரு செவ்வுருளையின் கனவளவையும் கணிக்கலாம்.




வட்ட அடியின் ஆரை $r$ ஆகவும் உயரம் $h$ ஆகவும் உள்ள ஒரு செவ்வட்ட உருளையைக் கருதுவோம். அதன் கனவளவை $V$ யினாற் காட்டுவோம்.

உருளையின் கனவளவு = குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு × உயரம்

$$V = \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$$

| உருளையின் கனவளவு $(V) = \pi r^2 h$ |
|---|

குறுக்குவெட்டு வட்டமாகவுள்ள ஒரு செவ்வுருளையின் கனவளவு தொடர்பாகப் பின்வரும் பிரசினங்கள் சிலவற்றில் கவனஞ் செலுத்துவோம்.

**உதாரணம் 1**

14 cm ஆரையும் 20 cm உயரமும் உள்ள ஒரு செவ்வட்ட உருளையின் கனவளவைக் காண்க.

இங்கு $r = 14$ cm

$h = 20$ cm

$\therefore$ உருளையின் கனவளவு $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 20$$

$$= 12\ 320 \text{ cm}^3$$

**உதாரணம் 2**

அடியின் பரப்பளவு 346.5 $\text{cm}^2$ ஆகவுள்ள ஓர் உருளைப் பாத்திரத்தின் கனவளவு 6930 $\text{cm}^3$ ஆகும்.

(i) உருளையின் ஆரையைக் காண்க.

(ii) உருளையின் உயரத்தைக் காண்க.

(i) ஆரை $r$ ஐ உடைய ஓர் உருளையின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு $= \pi r^2$

$$\therefore \pi r^2 = 346.5$$

$$\therefore r^2 = \frac{346.5}{22} \times 7$$

$$\therefore r^2 = 110.25$$

$$\therefore r = \pm 10.5\text{cm}$$

$\therefore$ ஆரை ($r$) $= 10.5$ cm ( தூரம் மறையாக இருக்க முடியாது )

(ii) முறை I

$$A \times h = V$$

$$346.5 \times h = 6930$$

$$h = \frac{6930}{346.5}$$

$$= 20 \text{ cm}$$

முறை II

உருளையின் கனவளவு 6930 $\text{cm}^3$ ஆகையால்

$$\pi r^2 h = 6930$$

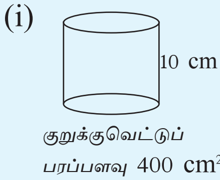
$$\therefore \frac{22}{7} \times 10.5 \times 10.5 \times h = 6930$$

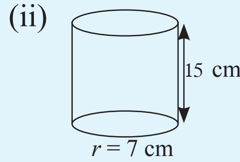
$$\therefore h = \frac{6930 \times 7}{22 \times 10.5 \times 10.5} = 20$$

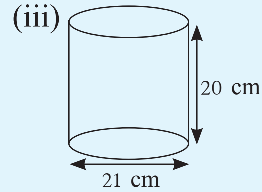
$\therefore$ உயரம் $= 20$ cm

**29.3 பயிற்சி**

**1.** பின்வரும் ஒவ்வோர் உருளையிலும் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்பக் கனவளவைக் காண்க.

(i)



(ii)



(iii)



**2.** (i) ஒவ்வொன்றினதும் ஆரை 7 cm ஆகவும் உயரம் முறையே 8 cm, 16 cm, 24 cm ஆகவும் உள்ள மூன்று உருளைகளின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவையும் கனவளவையும் கண்டு பின்வரும் அட்டவணையைப் பூர்த்திசெய்க.

| அடியின் ஆரை | குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு | உயரம் | கனவளவு |
|---|---|---|---|
| (*a*) 7 cm | | 8 cm | |
| (*b*) 7 cm | | 16 cm | |
| (*c*) 7 cm | | 24 cm | |

(ii) மேலே பூர்த்திசெய்த அட்டவணையின் தரவுகளைக் கொண்டு ஆரை மாறிலியாக இருக்கும்போது உயரம் இரு மடங்காக்கப்படும்போதும் மும்மடங்காக்கப் படும்போதும் கனவளவு மாற்றங்களை விளக்குக.

3. (i) ஒவ்வொன்றினதும் உயரம் 20 cm ஆகவும் ஆரை முறையே 7 cm, 14 cm, 21 cm ஆகவும் உள்ள மூன்று உருளைகளின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பளவையும் கனவளவையும் கண்டு பின்வரும் அட்டவணையைப் பூர்த்திசெய்க.

| அடியின் ஆரை | குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பளவு | உயரம் | கனவளவு |
|---|---|---|---|
| (*a*) 7 cm | | 20 cm | |
| (*b*) 14 cm | | 20 cm | |
| (*c*) 21 cm | | 20 cm | |

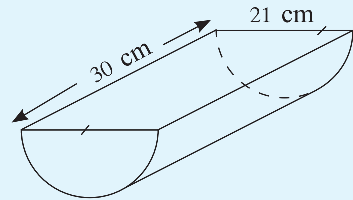
(ii) மேலே பூர்த்திசெய்த அட்டவணையின் தரவுகளைக் கொண்டு உயரம் மாறிலியாக இருக்கும்போது ஆரை இரு மடங்காக்கப்படும்போதும் மும் மடங்காக்கப்படும்போதும் கனவளவு மாற்றங்களை விளக்குக.

**4.** ஓர் உருளைப் பாத்திரத்தின் விட்டம் 28 cm ஆகும். அதில் உள்ள நீரின் கனவளவு 6160 $\text{cm}^3$ எனின் நீர் மட்டத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

**5.** ஒரு செவ்வகத் தகட்டின் நீளம் 22 cm உம் அகலம் 11 cm உம் ஆகும். இத்தகட்டிலே ஒரு பக்கம் வளைபரப்பாக இருக்குமாறு செய்யத்தக்க இரு உருளைகளை அளவீடுகளுடன் வரைந்து, அவை ஒவ்வொன்றினதும் கனவளவைக் காண்க.

**6.** விட்டம் 20 cm ஆகவும் வளைபரப்பின் பரப்பளவு 1000 $\text{cm}^2$ ஆகவும் உள்ள ஒரு செவ்வட்ட உருளையின் கனவளவைக் காண்க.

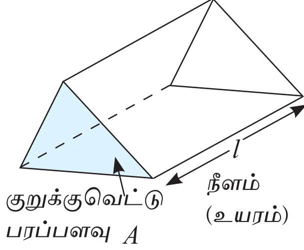
**7.** உருவில் காணப்படுகின்ற அளவுகளைக் கொண்ட ஓர் அரை உருளை உலோகப் பகுதியை உருக்கி உலோகம் வீணாகதவாறு 21 cm உயரமும் 3.5 cm ஆரையும் உள்ள எத்தனை திண்ம உலோக உருளைகளைச் செய்யலாமெனக் கணிக்க.




**8.** 14 cm ஆரையுள்ள ஓர் உருளைப் பாத்திரத்தில் 30 cm உயரத்திற்கு நீர் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. இப்பாத்திரத்தில் உள்ள நீரை முற்றாக அகற்றுவதற்கு 7 cm ஆரையும் 10 cm உயரமும் உள்ள ஓர் உருளைப் பாத்திரத்தைக் குறைந்தது எத்தனை தடவை பயன்படுத்த வேண்டும்.

## 29.4 அரியத்தின் கனவளவு

நீங்கள் மேலே 29.2 இல் இனங்கண்டவாறு குறுக்குவெட்டு முக்கோணியாகவுள்ள ஓர் அரியத்தின் கனவளவு காணப்படும் விதத்தைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.




சீரான குறுக்குவெட்டுள்ள ஒரு செந்திண்மத்தின் கனவளவு அதன் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவினதும் உயரத்தினதும் (நீளம்) பெருக்கத்திற்குச் சமம் என்பதை நாம் அறிவோம்.

உருவில் காணப்படும் முக்கோணி வடிவமுள்ள சீரான குறுக்குவெட்டைக் கொண்ட ஒரு செவ்வரியத்தின் கனவளவைக் காண்பதற்கு மேற்குறித்த கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.

அப்போது

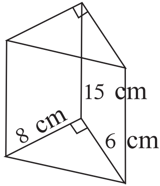
| |
|---|
| அரியத்தின் கனவளவு = குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு × செங்குத்துயரம் (நீளம்) |
| $V = Al$ |

**குறிப்பு**

இங்கு $A$ யினால் வகைக்குறிக்கப்படும் முக்கோணக் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பின் பெறுமானம் நேரடியாகத் தரப்படாதபோது பிரசினத்தில் உள்ள குறுக்குவெட்டு முக்கோணியின் தரவுகளுக்கேற்பக் கணித்துப் பெறப்படுதல் வேண்டும்.

ஓர் அரியத்தின் கனவளவு தொடர்பாகப் பின்வரும் பிரசினங்களில் கவனம் செலுத்துவோம்.

**உதாரணம் 1**




உருவில் காணப்படும் தரவுகளுக்கேற்ப,

(i) குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) கனவளவைக் காண்க.

(i) முக்கோண முகத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 \text{ cm}^2$

(ii) அரியத்தின் கனவளவு = குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு × செங்குத்துயரம் (நீளம்)

$= 24 \times 15$

$= 360 \text{ cm}^2$

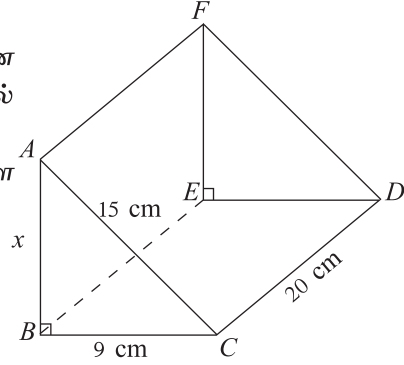
**உதாரணம் 2**

குறுக்குவெட்டு முகம் ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகவுள்ள ஓர் அரியம் உருவில் காணப்படுகின்றது.

(i) குறுக்குவெட்டில் $x$ இன் மூலம் காட்டப்பட்டுள்ள நீளத்தைக் காண்க.

(ii) குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவைக் காண்க.

(iii) அரியத்தின் கனவளவைக் காண்க.




(i) முக்கோணிக்குப் பைதகரஸ் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$15^2 = x^2 + 9^2$$
$$225 = x^2 + 81$$
$$225 - 81 = x^2$$
$$\sqrt{144} = x$$
$$x = 12 \text{ cm}$$

(ii) குறுவெட்டுப் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 9 \times 12$

$= 54 \text{ cm}^2$

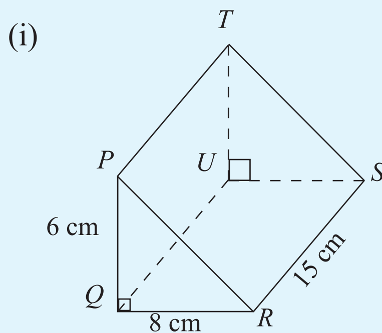
(iii) அரியத்தின் கனவளவு $= 54 \times 20$

$= 1080 \text{ cm}^3$

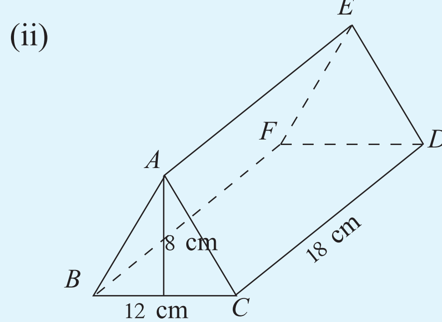
**பயிற்சி 29.4**

**1.** பின்வரும் வரிப்படங்களின் மூலம் காட்டப்படும் அரியங்களில் குறிக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு அவற்றின் கனவளவுகளைக் காண்க.

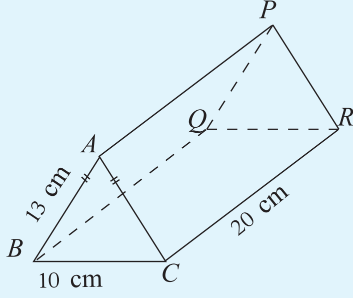
(i)



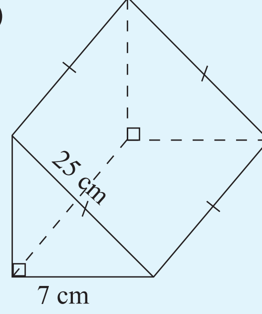

(ii)



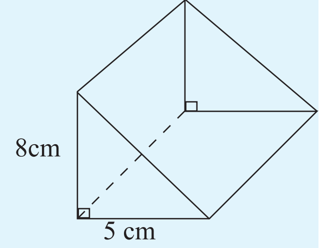
(iii)



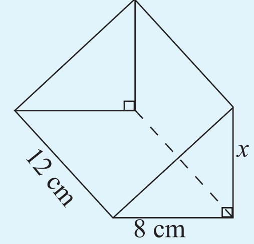

(iv)



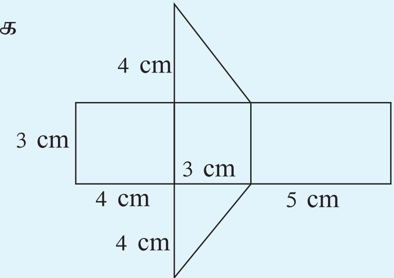

**2.** (i) அரியத்தின் கனவளவு 400 $\text{cm}^3$ எனின், அரியத்தின் நீளத்தைக் காண்க.




(ii) 288 $\text{cm}^3$ கனவளவுள்ள அரியத்தின் உயரம் 12 cm எனின் $x$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.




**3.** இவ்வலையைப் பயன்படுத்தி அமைக்கத்தக்க அரியத்தின் கனவளவைக் காண்க.




**4.** அடியின் நீளம், அகலம் முறையே 30 cm, 20 cm ஆகவுள்ள கனவுரு வடிவத்தை உடைய ஒரு பாத்திரத்தில் 8 cm உயரத்திற்கு நீர் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. அப்பாத்திரத்தினுள் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பளவு 60 $\text{cm}^2$ ஆகவுள்ள முக்கோணச் செவ்வரியம் மெதுவாக அமிழ்த்தப்படும்போது நீர் மட்டம் 2 cm இனால் உயருமெனின், அரியத்தின் செங்குத்துயரத்தைக் காண்க.

**5.** முக்கோணக் குறுக்குவெட்டின் பரப்பளவு 800 $cm^2$ ஆகவுள்ள அரியத்தின் வடிவமுள்ள ஒரு நீர்த் தொட்டியில் 30 cm உயரத்திற்கு நீர் நிரம்பியுள்ளது. இந்நீரின் அளவை 60 cm நீளமும் 20 cm அகலமும் உள்ள கனவுரு வடிவமுள்ள வேறொரு தொட்டியில் நீரை வீணாக்காமல் இடும்போது நீர்மட்டம் எழும் உயரம் யாது?

**பொழிப்பு**

அடியின் ஆரை $r$ ஆகவும் உயரம் $h$ ஆகவுமுள்ள ஒரு செவ்வுருளையில்

- மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$
- கனவளவு $= \pi r^2 h$

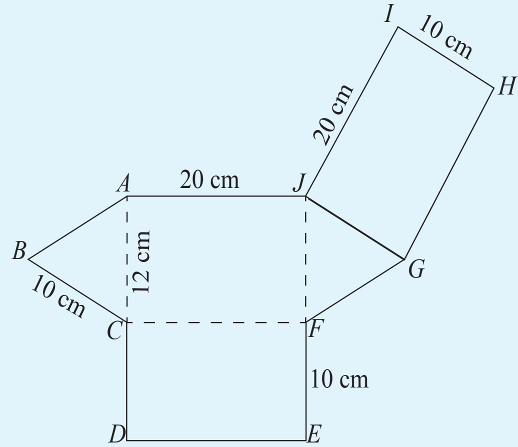
**பலவினப் பயிற்சி**

**1.** 14 cm ஆரையும் 25 cm உயரமும் உள்ள ஓர் உருளை மரப் பகுதியின்

(i) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) கனவளவைக் காண்க.

**2.** முறித்த கோடுகளின் வழியே மடிப்பதன்மூலம் குறுக்குவெட்டு முக்கோணியாகவுள்ள ஒரு செவ் வரியத்தைச் செய்யத்தக்கதாக ஒரு கீற்றின் அளவுகளுடன்கூடிய ஒரு பரும்படிப் படம் உருவிற் காணப் படுகின்றவாறு ஒரு தடித்த தாளைப் பயன்படுத்தித் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.



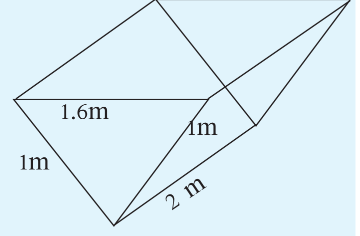

(i) ஓரம் $GH$ எவ்வோரத்துடன் பொருந்துகின்றது.

(ii) உச்சி $H$ எவ்வுச்சியுடன் பொருந்துகின்றது.

(iii) செய்யப்படும் அரியத்தின் முக்கோணப் பகுதியின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவைக் காண்க.

(iv) அரியத்தின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவையும் கனவளவையும் காண்க.

**3.** சீமெந்தைப் பயன்படுத்தி உருவிற் காணப்படும் அளவுகள் உள்ள முக்கோணிக் குறுக்குவெட்டைக் கொண்ட ஒரு மீன் தொட்டி மோகனின் வீட்டு முற்றத்திலே நிலத்தைத் தோண்டித் தயார் செய்யப் பட்டுள்ளது.



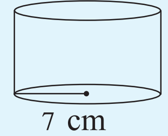

(i) இத்தொட்டியின் உள்மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) தொட்டியை முற்றாக நிரப்புவதற்குத் தேவையான நீரின் அளவை லீற்றரில் காண்க.

(iii) தொட்டியை முற்றாக நிரப்புவதற்கு 20l$\text{min}^{-1}$ என்னும் வீதத்தில் நீர் பாய்கின்ற ஒரு குழாய் பயன்படுத்தப்படுமெனின், அதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

(iv) மேற்குறித்த அதே கனவளவுள்ள, ஆனால் அரை உருளை வடிவத்தைக் கொண்ட, 1 m நீளத்திலும் குறைந்த நீளத்தை உடைய ஒரு புதிய தொட்டியைத் தயார் செய்வதற்கு மோகன் திட்டமிட்டுள்ளார். அதற்கு உகந்த அளவுகளைத் தெரிவிக்க.

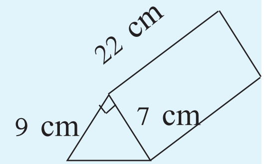
**4.** உருவில் 7 cm ஆரையும் $h$ cm உயரமும் கனவளவு 3080 $\text{cm}^2$ உம் உடைய உருளை தரப்பட்டுள்ளது.




(i) அவ்வுருளையின் உயரத்தையும்

(ii) அதன் மேற்பரப்பளவையும் காண்க.

**5.** உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள அரியம் நீரால் முற்றாக நிரம்பியுள்ளது. அந்நீரை 7 cm ஆரை உடைய உருளையொன்றினுள் இடப்பட்டது. உருளையில் நிரம்பியுள்ள நீரின் உயரத்தைக் காண்க.



# 30 நிகழ்தகவு

**இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,**
- எளிய நிகழ்ச்சிகளையும் கூட்டு நிகழ்ச்சிகளையும் அறிந்துகொள்வதற்கும்
- நிகழ்ச்சியொன்றின் நிகழ்தகவை அறிந்துகொள்வதற்கும்
- நிரப்பி நிகழ்ச்சிகள் தொடர்பாக அறிந்து கொள்வதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

ஒரு கோடாத நாணயத்தை மேலே எறியும்போது ''தலை'' அல்லது ''பூ'' பெறப்படும் என்பதை நாம் அறிவோம். இவ்வாறு ஒரு நாணயத்தை மேலே எறிந்து பெறப்படும் பக்கத்தை அவதானிப்பது எழுமாற்றுப் பரிசோதனைக்கான ஓர் உதாரணமாகும். அப்போது கிடைக்கக்கூடிய பேறுகள் ''தலை'' அல்லது ''பூ'' ஆகும். ஆயினும் ஒரு நாணயத்தை மேலே எறிந்து விழும் பக்கத்தை அவதானிப்பதற்கு முன்னர் எப்பக்கம் பெறப்படும் என உறுதியாகக் கூற முடியாது. கிடைக்கக்கூடிய பேறுகள் தெரியுமாயினும் உறுதியாகக் கூறமுடியாத பரிசோதனை எழுமாற்றுப் பரி சோதனை எனப்படும். எழுமாற்றுப் பரிசோதனை ஒன்றில் கிடைக்கக்கூடிய சகல பேறுகளும் அடங்கிய தொடை ''மாதிரிவெளி'' எனப்படும் இது " $S$ " இனால் வகைகுறிக்கப்படும்.

கீழே உள்ள அட்டவணையில் எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகளுக்கான சில உதாரணங் களும் உரிய மாதிரி வெளிகளும் தரப்பட்டுள்ளன.

| சமதகவுடைய பரிசோதனை | மாதிரி வெளி |
|---|---|
| 1. ஒரு கோடாத நாணயத்தை மேலே எறிந்து விழும் பக்கத்தைக் குறித்துக் கொள்ளல். | $S$ = {தலை, பூ} |
| 2. 1 தொடக்கம் 6 வரை இலக்கங் களிடப்பட்ட கோடாத சதுரமுகி வடிவிலான ஒரு தாயக்கட்டையை எறிந்து மேல் நோக்கியவாறு விழும் பக்கத்திலுள்ள எண்ணைக் குறித்துக்கொள்ளல். | $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ |
| 3. ஒரு குறித்த இலக்கை நோக்கி ஒரு பந்தை எறியும் ஒரு போட்டியில் கிடைக்கும் பேறுகளைக் குறித்துக் கொள்ளல். | $S$ = {இலக்குக்கு எறிதல், இலக்குக்கு எறியாமை} |

## நிகழ்ச்சி

நிகழ்ச்சி எனப்படுவது மாதிரி வெளியின் தொடைப்பிரிவாகும். பின்வரும் உதாரணத்தைக் கருதுக.

பக்கங்களில் 1 தொடக்கம் 4 வரை குறிக்கப்பட்டுள்ள கோடாத நான்முகித் தாயக்கட்டை ஒன்றை மேலே எறியும்போது மேல் நோக்கி விழும் பக்கத்தின் எண்ணைக் குறித்துக் கொள்ளும் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையைக் கருதுவோம்.

இங்கு மாதிரி வெளி $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ஆகும்.

இம்மாதிரி வெளியைக் குறிக்கும் தொடையின் சில தொடைப்பிரிவுள் $\{3\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$ ஆகும்.
இத்தொடைப் பிரிவுகளை இவ்வாறும் விபரிக்கலாம்.

$\{3\}$ இன் மூலம் ''பேறு 3 பெறப்படும் நிகழ்ச்சி'' தரப்படும்.

$\{2, 4\}$ இன் மூலம் ''2 அல்லது 4 பெறப்படும் நிகழ்ச்சி'' தரப்படும்.

மேலும் ''4 இலும் குறைந்த ஓர் எண் கிடைத்தல்'' என்னும் நிகழ்ச்சியை $A$ இனால் குறிப்பிடின் $A = \{1, 2, 3\}$ என எழுதலாம்.

| நிகழ்ச்சி எனப்படுவது மாதிரி வெளியின் தொடைப்பிரிவு எனப்படும். |
|---|

## எளிய நிகழ்ச்சிகளும் கூட்டு நிகழ்ச்சிகளும்

1 இலிருந்து 6 வரை எண்கள் எழுதப்பட்ட கோடாத ஒரு தாயக்கட்டையை மேலே எறிவதைக் கருதுவோம். இந்த எழுமாற்றுப் பரிசோதனையில்
மாதிரி வெளி $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ஆகும்.
இம்மாதிரி வெளிக்குரிய சில நிகழ்ச்சிகளை எழுதுவோம்.
$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}$

மேற்குறித்த நிகழ்ச்சிகளில் $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் ஒரு பேறு மாத்திரம் உள்ள தொடைப்பிரிவுகளாகும்.
இவ்வாறான மேலும் பிரிவுகளாக்க முடியாத நிகழ்ச்சிகள் எளிய நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

| ஒரு பேறு மாத்திரம் உள்ள நிகழ்ச்சிகள் எளிய நிகழ்ச்சிகளாகும் |
|---|

இதற்கேற்ப $\{5\}, \{6\}$ என்பனவும் எளிய நிகழ்ச்சிகளாகும்.

இவ்வாறான எளிய நிகழ்ச்சிகள் அல்லாத நிகழ்ச்சிகளைக் **கூட்டு நிகழ்ச்சிகள்** எனப்படும். மேற்குறித்த பரிசோதனைக்குரிய $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் கூட்டு நிகழ்ச்சிகளாகும். இக்கூட்டு நிகழ்ச்சிகளை மேலும் தொடைப் பிரிவுகளாக வேறாக்கிக் கொள்ளலாம்.

## 30.1 சமதகவுடைய பேறுகள்

கோடாத ஒரு நாணயத்தை மேலே எறிவதற்குரிய மாதிரிவெளி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$S = \{$தலை , பூ$\}$

நாணயம் கோடாதது என்பதால், இங்குள்ள இரண்டு பேறுகளிலும் எந்தவொரு பேறையும் பெறுவதற்கான இயலுமை சமனானது என்பது தெளிவாகும். மேலுமொரு உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

ஒரு பையில் சிவப்பு, வெள்ளை, கறுப்பு நிறங்களினாலான ஒரேயளவிலான 3 பந்துகள் உண்டு. எழுமாறாக அவற்றிலிருந்து ஒரு பந்தை வெளியே எடுப்பதைக் கருதுவோம். இதன் மாதிரி வெளி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$S = \{$சிவப்புப் பந்து கிடைத்தல், வெள்ளைப் பந்து கிடைத்தல், கறுப்புப் பந்து கிடைத்தல்$\}$

சமதகவுடைய பந்துகள் என்பதால் இம்மூன்று பேறுகளிலும் எந்தவொரு பேறும் கிடைப்பதற்கான இயலுமை சமனானது என்பது தெளிவாகும்.

இவ்வாறு யாதாயினுமொரு சமதகவுடைய பரிசோதனையில் சகல பேறுகளையும் பெறுவதற்கான சமதகவு இருக்குமாயின் அப்பரிசோதனை **சமதகவுடைய பேறுகளைக்** கொண்ட பரிசோதனை என அழைக்கப்படும்.

''கோடாத ஒரு நாணயத்தை மேலே எறிதல்'' என்னும் பரிசோதனையைக் கருதுவோம். இங்கு மாதிரி வெளியின் மூலகங்களாகிய ''தலை கிடைத்தல்'', ''பூ கிடைத்தல்'' ஆகிய சமதகவுடைய பேறுகளில் ஒவ்வொன்றினதும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ என நீங்கள் முன்னைய தரங்களில் கற்றுள்ளீர்கள்.

அதாவது தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

பூ விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

சமதகவற்ற பேறுகளையுடைய ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையைக் கருதுவோம். அமலன் ஒரு மா விதையை நட்டு அது ஒரு வாரத்தில் முளைக்குமா என அவதானிக்கின்றான்.

இங்கு மாதிரி வெளி
$S = \{$முளைத்தல், முளைக்காமை$\}$ ஆகும்.

ஆயினும் இந்த இரண்டு பேறுகளும் சமதகவுடையன எனக் கருதுவதற்கு காரணம் கூற முடியாது. ஆகவே இங்கு மா விதை முளைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ என கொள்ள இயலாது.

ஒரு மாதிரி வெளியில் சகல பேறுகளும் சமதகவுடைய சந்தர்ப்பத்தில் யாதாயினும் ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவானது பின்வருமாறு வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படும்.

அதாவது,

$$\text{ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு} = \frac{\text{நிகழ்ச்சியின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{மாதிரிவெளியின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை}}$$

மாதிரி வெளி $S$ இல் மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை $n\,(S)$இன் மூலமும் நிகழ்ச்சி $A$ இன் மூலங்களின் எண்ணிக்கையை $n\,(A)$இன் மூலமும் காட்டுவோம். அப்போது $A$ இன் நிகழ்தகவு $P\,(A)$ இன் மூலம் தரப்படும்.

$$P\,(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

உதாரணம் 1

1 இலிருந்து 5 வரை எண்கள் எழுதப்பட்டுள்ள ஒரே அளவிலான 5 அட்டைகள் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து எழுமாறாக ஓர் அட்டை எடுக்கப்பட்டது.
அதற்கான

(i) மாதிரி வெளியை எழுதி $n(S)$ ஐக் காண்க.
(ii) ஓர் இரட்டை எண் பெறப்படும் நிகழ்ச்சி $A$ ஆயின் $A$ இன் மூலகங்களை எழுதி $n(A)$ஐக் காண்க.
(iii) ஓர் இரட்டை எண் பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $P(A)$ ஐக் காண்க.

அட்டைகள் சமனானவை என்பதால் பரிசோதனை சமதகவுடைய பேறுகளை உடையது என்பது தெளிவாகும்.

(i) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ எனவே $n(S) = 5$
(ii) $A = \{2, 4\}$ எனவே $n(A) = 2$
(iii) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$
$= \frac{2}{5}$

**உதாரணம்** 2

1, 2, 3, 4, 5, 6 என முகங்களில் குறிக்கப்பட்டுள்ள கோடாத ஒரு தாயக்கட்டையை மேலே எறியும் ஒரு பரிசோதனையில் மேல் நோக்கி விழும் பக்கத்தின் எண்

(i) 4 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) ஓர் ஒற்றை எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iii) 2 இலும் கூடிய ஓர் எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

மாதிரி வெளி $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

எனவே $n(S) = 6$

(i) 4 பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{6}$

(ii) ஓர் ஒற்றை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(iii) 2 இலும் கூடிய ஓர் எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

**பயிற்சி** 30.1

**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமதகவுடைய பரிசோதனைக்குமுரிய மாதிரி வெளியை எழுதுக.

(i) 1 இலிருந்து 10 வரை எண்கள் எழுதப்பட்ட சமனான அட்டைகளின் தொகுதியிலிருந்து எழுமாறாக ஓர் அட்டையை எடுத்து எண்ணைக் குறித்துக் கொள்ளல்.

(ii) வட்ட வடிவிலான ஒரு தட்டை சமனான மூன்று பகுதிகளாகப் பிரித்து அவை ஒவ்வொன்றிலும் சிவப்பு, நீலம், மஞ்சள் ஆகிய நிறங்கள் வீதம் பூசப்பட்டுள்ளன. தட்டின் மையத்தில் காட்டியொன்று பொருத்தப்பட்டுள்ளது. தட்டின் மையத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள காட்டியைச் சுழலவிட்டு அது ஓய்வில் வரும் பகுதியின் நிறத்தைக் குறித்துக் கொள்ளல்.

(iii) ஒரு கிறிக்கெற் போட்டியில் ஒரு பந்தைத் துடுப்பாட்டம் செய்யும்போது பெறப்படும் ஓட்டங்களைக் குறித்துக் கொள்ளல்.

**2.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் எளிய நிகழ்ச்சியா, கூட்டு நிகழ்ச்சியா? என்பதைத் தெரிந்து எழுதுக.

(i) (*a*) 1 இலிருந்து 4 வரை எண்கள் எழுதப்பட்ட நான்முகித் தாயக்கட்டை ஒன்றை மேலே எறியும்போது எண் 3 உள்ள பக்கம் கிடைத்தல்.

(*b*) ஒற்றை எண் உள்ள ஒரு பக்கம் கிடைத்தல்.

(ii) $A, B, C, D, E$ என எழுதப்பட்டுள்ள ஒரே அளவிலான 5 அட்டைகளைக் கொண்ட ஒரு தொகுதியிலிருந்து
   ($a$) எழுத்து $C$ ஐ உடைய ஓர் அட்டை கிடைத்தல்.
   ($b$) உயிரெழுத்தை உடைய ஓர் அட்டை கிடைத்தல்.

**3.** 1 இலிருந்து 8 வரை எண்கள் எழுதப்பட்ட ஒரே அளவிலான மாபிள்களைக் கொண்ட ஒரு பையிலிருந்து எழுமாறாக ஒரு மாபிளை எடுக்கும்போது
   ($a$) 4 இலும் கூடிய எண்ணொன்றைக் கொண்ட ஒரு மாபிள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி $A$ ஆயின் $A$ இன் மூலகங்களை எழுதுக.
   ($b$) நிகழ்ச்சி $A$ இலுள்ள 4 எளிய நிகழ்ச்சிகளை எழுதுக.

**4.** 1 இலிருந்து 10 வரை எண்கள் எழுதப்பட்ட ஒரே அளவிலான 10 அட்டைகள் ஒரு பையில் உள்ளன. எழுமாறாக இவற்றிலிருந்து ஓர் அட்டை எடுக்கப்படும் பரிசோதனைக்குரிய,
   (i) மாதிரி வெளியை எழுதுக.
   (ii) ஒரு சதுர எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி $X$ ஆயின் $X$ இன் மூலகங்களை எழுதி $n(X)$ இன் பெறுமானத்தை எழுதுக.
   (iii) ஒரு சதுர எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(X)$ ஐக் காண்க.

**5.** ஒரே அளவிலான 5 மாபிள்களில் 3 மாபிள்கள் நீலநிறமும் எஞ்சியவை சிவப்பு நிறமும் உடையவை ஆகும். எழுமாறாக ஒரு பரிசோதனைக்குரிய
   (i) மாதிரி வெளியை எழுதுக.
   (ii) சிவப்பு மாபிள் ஒன்று கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (iii) நீல மாபிள் ஒன்று கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

**6.** ஒரு பெட்டியில் ஒரே அளவும் ஒரே வடிவமும் உடைய இரு வகை இனிப்புகள் உண்டு. அவைபற்றிய தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

| | மாம்பழச் சுவை | தோடம்பழச் சுவை |
|---|---|---|
| வகை $A$ | 8 | 10 |
| வகை $B$ | 9 | 13 |

இப்பெட்டியிலிருந்து எழுமாறாக ஓர் இனிப்பு வெளியே எடுக்கப்படுகின்றது. அது
   (i) தோடம்பழச்சுவை உள்ளதாக இருப்பதற்கான
   (ii) வகை $A$ இலான ஒன்றாக இருப்பதற்கான
   (iii) வகை $B$ இலான ஒன்றாக இருப்பதற்கான
   (iv) வகை $A$ இலான மாம்பழச்சுவையுள்ள ஒன்றாக இருப்பதற்கான
   (v) வகை $B$ தோடம்பழச்சுவையுள்ள ஒன்றாக இருப்பதற்கான
   நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

## 30.2 இரண்டு நிகழ்ச்சிகளின் இடைவெட்டும் ஒன்றிப்பும்

$A$, $B$ ஆகியன இரண்டு நிகழ்ச்சிகளாயின் அவற்றின் இடைவெட்டாகிய $A \cap B$ உம் ஒன்றிப்பாகிய $A \cup B$ உம் நிகழ்ச்சிகளாகும். உதாரணமாக 1, 2, 3, 4, 5 என எண்கள் எழுதப்பட்டுள்ள ஒரே அளவிலான 5 பந்துக்களிலிருந்து எழுமாறாக ஒரு பந்தை எடுக்கும் சமதகவுடைய பரிசோதனைக்குரிய

மாதிரி வெளி $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ஆகும்.

இங்கு

2 இலும் கூடிய ஓர் எண்ணைக் கொண்ட ஒரு பந்து கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை $A$ எனக் கொள்ளும்போது

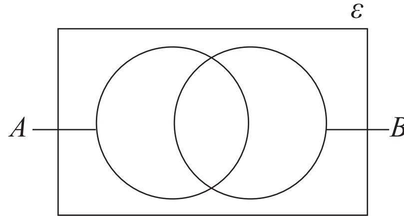
$A = \{3, 4, 5\}$

ஓர் இரட்டை எண்ணைக்கொண்ட பந்து கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை $B$ எனக் கொள்ளும்போது

$B = \{2, 4\}$

அப்போது, $A \cap B = \{4\}$ ஆகும். இங்கு $A \cap B$ இன் மூலம் $A,B$ ஆகிய இரு தொடைகளுக்குமுரிய, அதாவது 2 இலும்கூடிய ஓர் இரட்டை எண்ணைக்கொண்ட ஒரு பந்து கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி பெறப்பட்டுள்ளது.

மேலும் $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$ ஆகும். இங்கு $A \cup B$ இன்மூலம் $A$ இலிருந்து அல்லது $B$ இலிருந்து ஒரு நிகழ்ச்சியை தெரிதல் ஆகும். அதாவது 2 இலும் கூடிய ஓர் எண் அல்லது இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி ஆகும். தற்போது $A$, $B$, $A \cup B$, $A \cap B$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளுக்கிடையே உள்ள ஒரு தொடர்பு பற்றிப் பார்ப்போம்.




தொடை பற்றிய அறிவின்படி

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ என்னும் சூத்திரம் எம்மிடம் உண்டு.

இங்குள்ள சகல உறுப்புகளையும் $n(S)$ இனால் வகுக்கும்போது

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$ கிடைக்கும்.

சமதகவுடைய பேறுகள் என்பதால்,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

இதற்கேற்ப $A, B$ என்பன மாதிரி வெளியின் யாதேனும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகளாயின்

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

கருத்திற் கொண்ட உதாரணத்தில்,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{5} \text{ உம்}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{5} \text{ உம்}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{5} \text{ உம்}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{4}{5} \text{ உம் ஆகும். மேலும்}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{4}{5} \text{ என்பதால்}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

என்னும் சூத்திரம் இவ்வுதாரணத்திற்கு உண்மை எனக் காட்டுகின்றது.

## தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள்

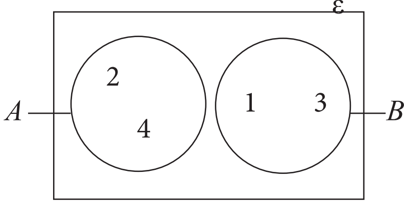
1 இலிருந்து 4 வரை எண்கள் எழுதப்பட்ட கோடாத நான்முகித் தாயக்கட்டையை மேலே எறியும்போது ஓர் இரட்டை எண் விழும் நிகழ்ச்சியை $A$ எனவும் ஓர் ஒற்றை எண் விழும் நிகழ்ச்சியை $B$ எனவும் கொள்வோம்.

அதாவது $A = \{2, 4\}$ , $B = \{1, 3\}$.

அப்போது $A \cap B = \emptyset$ அதாவது $A$ , $B$ ஆகியவற்றுக்கு பொது மூலகங்கள் இல்லை. இந்த இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே தடவையில் இடம்பெறுவதில்லை. இவ்வாறன நிகழ்ச்சிகள் தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

| $A \cap B = \emptyset$ ஆயின் $A$ , $B$ ஆகியன தம்முள் புறநீக்குவன ஆகும். |
|---|

இனி, நாம் மேலே உதாரணத்தில் தரப்பட்டுள்ள விடயங்களைப் பின்வருமாறு வென்னுருவில் காட்டுவோம்.




$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{0}{4} = 0$$

$A$ , $B$ என்பன தம்முள்புறநீக்கும்போது $A \cap B = \emptyset$ என்பதால் $P(A \cap B) = 0$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப,

| $A$ , $B$ என்பன தம்முள்புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின் $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ |
|---|

## நிரப்பி நிகழ்ச்சிகள்

1 இலிருந்து 5 வரை எண்கள் எழுதப்பட்ட ஒரே அளவிலான ஐந்து அட்டைகளைக் கொண்ட ஒரு தொகுதியிலிருந்து எழுமாறாக ஓர் அட்டையை எடுக்கும் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையைக் கருதுவோம்.

இங்கு மாதிரிவெளியை $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ என எழுதுவோம்.

ஓர் இரட்டை எண் உள்ள அட்டை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி $A$ ஆயின் $A = \{2, 4\}$ ஆகும்.

நிகழ்ச்சி $A$ நிகழாமை அதாவது இரட்டை எண் அல்லாத ஓர் அட்டை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி $B$ ஆயின்,

$B = \{1, 3, 5\}$ ஆகும்.

மேற்குறித்த பரிசோதனையில் ஓர் இரட்டை எண் உள்ள ஓர் அட்டை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி $A$ ஆகும்போது இரட்டை அல்லாத ஓர் அட்டை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியானது $A$ இன் **நிரப்பி நிகழ்ச்சி** என அழைக்கப்படும். $A$ இன் நிரப்பி நிகழ்ச்சியானது $A'$ என எழுதப்படும்.

இதற்கேற்ப, $A' = \{1, 3, 5\}$

இங்கு $A \cup A' = S$ ஆகும்.

மேலும் $A \cap A' = \emptyset$ ஆகும்.

எனவே $A, A'$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும். இப்பேறுகள் எந்தவொரு நிகழ்ச்சிக்கும் உண்மையானவை ஆகும்.

இதற்கேற்ப $P(A \cup A') = P(A) + P(A')$

$$\therefore P(S) = P(A) + P(A')$$

$$\therefore 1 = P(A) + P(A') \qquad [P(S) = 1 \text{ என்பதால்}]$$

$$\therefore P(A') = 1 - P(A)$$

எந்தவொரு நிகழ்ச்சி $A$ இற்கும் $P(A') = 1 - P(A)$ ஆகும்.

**உதாரணம்** 1

சமதகவுடைய ஒரு பரிசோதனையில் $A$ , $B$ ஆகிய இரண்டு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A) = \frac{2}{7}$ உம் $P(B) = \frac{3}{7}$ உம் , $P(A \cap B) = \frac{1}{14}$ உம் ஆகும்.

பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A')$ (iii) $P(B')$ (iv) $P(A \cap B)'$ (v) $P(A \cup B)'$

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ சூத்திரத்திலிருந்து

$$P(A \cup B) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{14}$$

$$= \frac{4}{14} + \frac{6}{14} - \frac{1}{14} = \frac{9}{14}$$

(ii) $P(A') = 1 - P(A)$ சூத்திரத்திலிருந்து

$$P(A') = 1 - \frac{2}{7}$$

$$= \frac{7}{7} - \frac{2}{7}$$

$$= \frac{5}{7}$$

(iii) $P(B') = 1 - P(B)$ சூத்திரத்திலிருந்து

$$P(B') = 1 - \frac{3}{7}$$

$$= \frac{7}{7} - \frac{3}{7}$$

$$= \frac{4}{7}$$

(iv) $P(A\cap B)' = 1 - P(A\cap B)$

$= 1 - \frac{1}{14}$

$= \frac{14}{14} - \frac{1}{14}$

$= \frac{13}{14}$

(v) $P(A\cup B)' = 1 - P(A\cup B)$

$= 1 - \frac{9}{14}$

$= \frac{14}{14} - \frac{9}{14}$

$= \frac{5}{14}$

**உதாரணம் 2**

$X$ , $Y$ என்பன தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும் அத்துடன்
$P(X) = \frac{1}{6}$ உம் $P(Y) = \frac{7}{12}$ உம் ஆகும்.

(i) $P(X\cap Y)$ (ii) $P(X\cup Y)$ என்பவற்றைக் காண்க.

(i) $X, Y$ என்பன தம்முள் புறநீக்கும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் என்பதால் $P(X\cap Y) = 0$.

(ii) நிகழ்ச்சி $X\cup Y$ என்பது "$X$ நிகழ்ச்சிகள் அல்லது $Y$ நிகழ்ச்சிகள்" என்னும் நிகழ்ச்சியாகும் $X$ ,$Y$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் தம்முள் புறநீக்குவன என்பதால்

$P(X\cup Y) = P(X) + P(Y)$

$= \frac{1}{6} + \frac{7}{12}$

$= \frac{2}{12} + \frac{7}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

**பயிற்சி 30.2**

**1.** 1 இலிருந்து 6 வரை எண்ணிடப்பட்ட கோடாத ஒரு தாயக்கட்டையை மேலே எறியும் ஒரு பரிசோதனையில் ஒரு முதன்மை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி $A$ உம் ஒரு நிறைவர்க்கம் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி $B$ உம் 4 இலும் கூடிய ஓர் எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி $C$ உம் 6 இன் மடங்காகும் ஓர் எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி $D$ உம் ஆயின், $A$, $B$, $C$, $D$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகளில் தம்முள் புறநீக்கும் சோடி நிகழ்ச்சிகளைத் தெரிக.

**2.** $X$ , $Y$ என்பன சமதகவுடைய ஒரு பரிசோதனையில் தம்முள் புறநீக்காத இரண்டு நிகழ்ச்சிகளாகும். $P(X) = \frac{1}{4}$ , $P(Y) = \frac{5}{6}$ , $P(X\cap Y) = \frac{1}{6}$ ஆயின்

பின்வரும் நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றினதும் பெறுமானம் காண்க.

(i) $P(X\cup Y)$ (ii) $P(X')$ (iii) $P(Y')$ (iv) $P[(X\cap Y)']$ (v) $P[(X\cup Y)']$

**3.** $A$ , $B$ என்பன சமதகவுடைய ஒரு பரிசோதனையில் இரண்டு நிகழ்ச்சிகளாகும். $P(A)=\frac{2}{7}$ உம் $P(B')=\frac{1}{4}$ உம் ஆகும். $P(A')$ , $P(B)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

**4.** $X$ , $Y$ என்பன சமதகவுடைய ஒரு பரிசோதனையில் இரண்டு நிகழ்ச்சிகளாகும். $P(X)=\frac{1}{2}$ உம் $P(Y)=\frac{1}{3}$ உம் $P(X\cup Y)=\frac{5}{6}$ உம் எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) $P(X\cap Y)$ ஐக் காண்க.

(ii) அதிலிருந்து $X$ , $Y$ என்பன தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனக் காட்டுக.

**5.** $X$, $Y$ ,$Z$ என்பன சமதகவுடைய ஒரு பரிசோதனையில் மூன்று நிகழ்ச்சிகளாகும். $P(X)=\frac{1}{6}$ , $P(Y)=\frac{1}{9}$ , $P(Z')=\frac{2}{3}$ , $P(X\cap Y)=\frac{1}{18}$, $P(X\cap Z)=\frac{1}{12}$ ஆகும்.

பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $P(X)$ (ii) $P(Y')$ (iii) $P(Z)$ (iv) $P(X\cup Y)$ (v) $P(X\cup Z)'$

## 30.3 மாதிரி வெளியை ஒரு நெய்யரியில் குறித்தல்

கோடாத சமச்சீரான இரண்டு நாணயங்கள் $A$, $B$ என்பவற்றை ஒரே நேரத்தில் மேலே எறியப்படும் ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையைக் கருதுவோம்.
ஒரு நாணயத்தின் தலையை $H$ இன்மூலமும் பூவை $T$ இன்மூலமும் காட்டுவோம்.
இப்பரிசோதனையில் கிடைக்கக்கூடிய எல்லாப் பேறுகளையும் பின்வருமாறு காட்ட முடியும்.
இரண்டு நாணயங்களிலும் தலை கிடைத்தல் $(H, H)$
$A$ நாணயத்தில் தலையும் $B$ நாணயத்தில் பூவும் கிடைத்தல் $(H, T)$
$A$ நாணயத்தில் பூவும் $B$ நாணயத்தில் தலையும் கிடைத்தல் $(T, H)$
இரண்டு நாணயங்களிலும் பூ கிடைத்தல் $(T, T)$

இதற்கேற்ப, மாதிரி வெளியை $\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$ எனக் காட்டலாம். இம்மாதிரி வெளியை ஒரு நெய்யரியில் இவ்வாறு குறிக்கலாம்.



இங்கு $2\times 2$ இன் மூலம் பேறுகள் குறிக்கப்படும்.

இங்கு மாதிரி வெளியில் 4 பேறுகள் உண்டு. நாணயம் கோடாதது என்பதால் இப்பேறுகள் 4 உம் சமதகவுடையனவாகும். இதற்கேற்ப பின்வரும் நிகழ்தகவுகள் கிடைக்கும்.

(i) இரண்டு நாணயங்களிலும் தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{4}$

(ii) முதலாம் நாணயத்தில் பூவும் இரண்டாவது நாணயத்தில் தலையும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{4}$

(iii) ஒரு நாணயத்தில் தலையும் மற்றைய நாணயத்தில் பூவும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{2}{4}$

(iv) இரண்டு நாணயங்களிலும் பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{4}$

**உதாரணம்** 1

1 இலிருந்து 4 வரை இலக்கமிடப்பட்ட ஒரு நான்முகித் தாயாக்கட்டையும் ஒரு நாணயமும் ஒரே தடவையில் மேலே எறியப்பட்டு மேசையின்மீது தொடும் முகத்தைக் குறித்துக் கொள்ளும் ஒரு பரிசோதனையைக் கருதுவோம்.

(i) மாதிரி வெளியை வரிசைப்பட்ட சோடிகளாக எழுதி ஒரு நெய்யரியில் குறித்துக் காட்டுக.

(ii) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(*a*) தாயக்கட்டையில் எண் 1 கிடைத்தல்

(b) தாயக்கட்டையில் ஓர் இரட்டை எண்ணும் நாணயத்தில் பூவும் கிடைத்தல்

(*c*) தாயக்கட்டையில் எண் 2 உம் நாணயத்தில் தலையும் கிடைத்தல்

(i)- $S = \{(1,H),(2,H),(3,H),(4,H),(1,T),(2,T),(3,T),(4,T)\}$

இம்மாதிரி வெளியின் மூலகங்களை (வரிசைப்பட்ட சோடிகளை) நெய்யரியில் குறிப்போம்.

நாணயம்
T
H
1 2 3 4
நான்முகித் தாயக்கட்டை

(ii) இங்கு சகல பேறுகளும் சமதகவுடையது என்பது தெளிவாகும்.

A
நாணயம்
T
H
1 2 3 4
நான்முகித் தாயக்கட்டை

(*a*) மேலே உள்ள நெய்யரியில் $A$ யினால் தாயக்கட்டையில் 1 பெறப்படும் நிகழ்ச்சிக்குரிய மூலகங்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன. இங்கு இரண்டு மூலகங்கள் உள்ளன. மாதிரி வெளியிலுள்ள மொத்த மூலகங்களின் எண்ணிக்கை 8 ஆகும்.

$\therefore$ தாயக்கட்டையில் எண் 1 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

(*b*) மேலே உள்ள நெய்யரியில் □ என்னும் வடிவிலுள்ள பிரதேசத்தில் தாயக்கட்டையில் ஓர் இரட்டை எண்ணும் நாணயத்தில் பூவும் பெறப்படும் நிகழ்ச்சிக்குரிய மூலகங்கள் சேர்ந்துள்ளன. இங்கும் இரண்டு மூலகங்கள் உண்டு.

தாயக்கட்டையில் ஓர் இ ரட்டை எ ண்ணும் நாணயத்தில் பூவும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

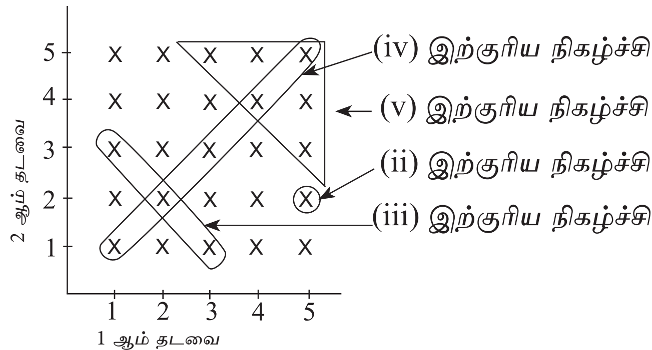
(*c*) மேலே உள்ள நெய்யரியில் ◯ என்னும் வடிவிலுள்ள பிரதேசத்தில் தாயக்கட்டையில் எண் 2 உம் நாணயத்தில் தலையும் பெறப்படும் நிகழ்ச்சிக்குரிய மூலகங்கள் சேர்ந்துள்ளன. இங்கு ஒரு மூலகம் உண்டு.

$\therefore$ தாயக்கட்டையில் எண் 2 உம் நாணயத்தில் தலையும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{8}$

**உதாரணம் 2**

1, 2, 3, 4, 5 என எண்களிடப்பட்டுள்ள ஒரே அளவிலான 5 பந்துகள் ஒரு பையில் உள்ளன. இப்பையிலிருந்து சமதகவுள்ளதாக ஒரு பந்தை எடுத்து எண்ணைக் குறித்த பின்னர் மீண்டும் பந்தைப் பையினுள்ளே வைத்து (அதாவது மீள்வைத்தலுடன்) இரண்டாம் தடவையும் ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டு எண் குறித்துக்கொள்ளப்படுகின்றது.

(i) இப்பிரதேசத்துக்குரிய மாதிரி வெளியை ஒரு நெய்யரியில் காட்டுக.



(ii) வெளியே எடுக்கப்பட்ட முதற் பந்தில் எண் 5 உம் இரண்டாவது பந்தில் எண் 2 உம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$\frac{1}{25}$$

(iii) வெளியே எடுத்த இரண்டு பந்துகளிலும் உள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகை 4 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$\frac{3}{25}$$

(iv) இரு தடவையும் ஒரே இலக்கம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

(v) வெளியே எடுத்த பந்துகளில் குறித்துள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகை 7 இலும் கூடியதாயிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

$$\frac{6}{25}$$

(vi) மேலே (ii), (iii) ஆகியவற்றில் குறித்த இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் தம்முள் புறநீக்குவனவா?

ஆம். காரணம் அவற்றுக்கு பொது மூலகங்கள் இல்லை.

(vii) மேலே (iii),(iv) ஆகிவற்றில் குறிப்பிடப்படும் நிகழ்ச்சிகள் இரண்டும் தம்முள் புறநீக்குவனவா?

இல்லை. காரணம் அவற்றுக்கு பொது மூலகங்கள் உண்டு .( அது (2, 2) ஆகும்.)

**பயிற்சி 30.3**

**1.** 1 இலிருந்து 6 வரை எண்கள் எழுதப்பட்ட கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டையும் கோடாத ஒரு நாணயமும் ஒரே தடவையில் மேலே எறியப்பட்டு மேல் நோக்கியதாக விழும் பக்கத்தைக் குறித்துக்கொள்ளும் பரிசோதனையைக் கருதுவோம்.

(அ) மாதிரி வெளியை ஒரு நெய்யரியில் குறிக்க.

(ஆ) அதிலிருந்து பின்வரும் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(i) தாயக்கட்டையில் 1 உம் நாணயத்தில் தலையும் கிடைத்தல்.

(ii) தாயக்கட்டையில் ஓர் இரட்டை எண்ணும் நாணயத்தில் தலையும் கிடைத்தல்.

(iii) நாணயத்தில் பூ கிடைத்தல்.

**2.** முகங்களில் 1 இலிருந்து 6 வரை எண்கள் எழுதப்பட்ட சதுரமுகி வடிவிலான இரண்டு தாயக்கட்டைகள் ஒரே தடவையில் மேலே எறியப்பட்டு மேல் நோக்கி விழும் முகங்களில் உள்ள எண்கள் குறித்துக்கொள்ளப்படும் பரிசோதனை ஒன்றைக் கருதுவோம்.

(அ) மாதிரி வெளியை ஒரு நெய்யரியில் குறிக்க.

(ஆ) அதிலிருந்து பின்வரும் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க

(i) குறித்துக்கொண்ட எண்களின் கூட்டுத்தொகை 5 ஆக இருத்தல்

(ii) குறித்துக்கொண்ட எண்களின் கூட்டுத்தொகை 10 இலும் கூடியதாக இருத்தல்.

(iii) குறித்துக் கொண்ட எண்கள் ஒரே எண்களாக இருத்தல்.

(iv) முதலாவது தாயக்கட்டையில் எண் 3 கிடைத்தல்.

**3.** ஒரு பையில் 3 சிவப்பு நிற மாபிள்களும் ஒரு நீல மாபிளும் 2 மஞ்சள் நிற மாபிள்களும் உண்டு. இவை $R_1, R_2, R_3, B_1, Y_1, Y_2$ எனப் பெயரிடப்பட்டுள்ளன. எழுமாறாக இவற்றிலிருந்து ஒரு மாபிளைத் தெரிந்து அதன் நிறத்தைக் குறித்துக் கொண்ட பின்னர் மீண்டும் பையினுள் இடப்பட்டு (மீளவைத்தல்) மீண்டும் ஒரு மாபிள் எடுக்கப்பட்டு அதன் நிறமும் குறிக்கப்படுன்றது.

(அ) மாதிரி வெளியை ஒரு நெய்யரியில் குறிக்க.

(ஆ) அதிலிருந்து பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளைக் காண்க.

(i) முதலாவது மாபிள் சிவப்பாகவும் இரண்டாவது மாபிள் மஞ்சளாகவும் இருத்தல்.

(ii) இரண்டு மாபிள்களும் சிவப்பு நிறமாக இருத்தல்.

(iii) இரண்டு மாபிள்களும் ஒரே நிறத்தையுடையவனவாக இருத்தல்.

(iv) ஒரு தடவையேனும் நீல நிற மாபிள் கிடைத்தல்.

(v) மேலே (i) - (iv) வரையுள்ள நிகழ்ச்சிகளில் தம்முள் புறநீக்கும் சகல சோடி நிகழ்ச்சிகளையும் தருக.

**4.** குறித்தவொரு சந்தியிலுள்ள சுரங்கப் பாதையொன்றில் $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ எனப் பெயரிடப்பட்ட 5 பாதைகள் உள்ளன. எந்தவொரு பாதையினூடாகவும் உட்பிரவேசிக்கவோ வெளியேறவோ முடியும். ஒரு பயணி எந்தவொரு பாதையினூடாகவும் உட்பிரவேசித்து வெளியேறக்கூடிய சகல முறைகளையும் காட்டும் ஒரு மாதிரி வெளியை ஒரு நெய்யரியில் காட்டி பின்வரும் நிகழ்ச்சி களின் நிகழ்தகவைக் காண்க.

*(சகல பேறுகளும் சமதகவுடையவை எனக் கொள்க.)*

(i) பாதை $A$ இனூடாக உட்பிரவேசித்து பாதை $B$ இனூடாக வெளியேறுதல்.

(ii) பாதை $A$ அல்லது $B$ இனூடாக உட்பிரவேசித்து பாதை $D$ இனூடாக வெளியேறுதல்.

(iii) பாதை $E$ இனூடாக உட்பிரவேசித்தல்.

(iv) உட்பிரவேசிக்கும் பாதையினூடாகவே வெளியேறல்.

**5.** ஒரு பூ மரத்தில் ஒரே அளவிலான 4 சிவப்பு நிறப் பூக்களும் 3 மஞ்சள் நிறப் பூக்களும் உள்ளன. $A,B$ என்னும் இரண்டு வண்ணத்துப்பூச்சிகள் இப்பூக்களில் தேனை அருந்த வந்தன. இரண்டு வண்ணத்துப்பூச்சிகளுக்கும் ஒரே பூவில் ஒன்றாக தேனை அருந்த முடியும். இவ்வாறு இரண்டு வண்ணத்துப்பூச்சிகளும் எந்தவொரு பூவிலும் தேனை அருந்தக்கூடிய எல்லா சந்தர்ப்பங்களையும் காட்டக்கூடிய மாதிரிவெளியை ஒரு நெய்யரியில் காட்டி பின்வரும் சந்தர்ப்பங்களில் நிகழ்தகவைக் காண்க. ஒவ்வொரு வண்ணத்துப்பூச்சியும் எழுமாறாகவும் சாராதனவாகவும் பூக்களைத் தெரிகின்றன எனக் கொள்க.

(i) வண்ணத்துப்பூச்சி $A$ ஒரு சிவப்பு பூவிலும் வண்ணத்துப்பூச்சி $B$ ஒரு மஞ்சள் பூவிலும் தேன் அருந்தல்.

(ii) இரண்டு வண்ணத்துப்பூச்சிகளும் ஒரே நிறப் பூவில் தேனை அருந்துதல்.

(iii) இரண்டு வண்ணத்துப்பூச்சிகளும் வேறுவேறு நிறங்களிலான பூக்களில் தேனை அருந்துதல்

(iv) இரண்டு வண்ணத்துப்பூச்சிகளும் ஒரே பூவில் தேன் அருந்துதல்.

## 30.4 சாரா நிகழ்ச்சிகள்

கீழே தரப்பட்டுள்ள சமதகவுடைய பரிசோதனைகளில் கவனத்தில் கொள்வோம்.

(i) கோடாத இரண்டு நாணயங்களை ஒரே தடவையில் மேல்நோக்கி எறிந்து மேல்நோக்கி விழும் பக்கத்தை அவதானிக்கும் ஒரு பரிசோதனையில், ஒரு நாணயம் விழும் பக்கம் எதுவாயிருப்பினும் மற்றைய நாணயத்தில் விழும் பக்கத்தில் அது தாக்கத்தை ஏற்படுத்துவதில்லை என்பது தெளிவாகும்.

(ii) ஒரே அளவிலான பந்துகளைக் கொண்டுள்ள இரண்டு பைகளில் ஒவ்வொரு பையிலிருந்தும் எழுமாறாக ஒரு பந்து வீதம் தெரிந்தெடுக்கும் ஒரு பரி சோதனையில் ஒரு பையிலிருந்து பெறும் பந்து இரண்டாவது பையிலிருந்து பெறப்படும் பந்தில் தாக்கத்தை ஏற்படுத்துவதில்லை என்பது தெளிவாகும்.

(iii) சில வித்துகள் நாட்டி அவை முளைக்கும்போது யாதாயினும் வித்து முளைப்பது வேறொரு வித்து முளைப்பதில் தாக்கத்தை ஏற்படுத்துவதில்லை.

இவ்வாறு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையில் ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்வானது வேறொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்வின் மீது தாக்கத்தை ஏற்படுத்தாது எனின், இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

| $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ எனின் $A$ யும் $B$ யும் சராதவை |
|---|

இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனின், அவை இரண்டும் ஒரே நேரத்தில் நிகழ்வதில்லை என்பதைக் காட்டுகின்றது. ஆனால் சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனின் அவை ஒரே நேரத்தில் நடைபெறும் இரு நிகழ்ச்சிகள் ஆனால் ஒரு நிகழ்ச்சி மற்றையதில் தாக்கம் செலுத்துவதில்லை.

**உதாரணம்** 1

$X, Y$ என்பன இரண்டு சாரா நிகழ்ச்சிகளாகும் $P(X)=\frac{1}{3}$ , $P(Y)=\frac{1}{4}$ ஆகும். $P(X \cap Y)$, $P(X \cup Y)$ என்பவற்றையும் காண்க.

$X$ , $Y$ என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் என்பதால்

$$P(X \cap Y) = P(X).P(Y).$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$ சூத்திரத்தை உபயோகிப்பதால்

$$P(X \cup Y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{4+3-1}{12}$$

$P(X \cup Y) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ஆகும்.

**உதாரணம்** 2

குறித்தவொரு போட்டிப் பரீட்சைக்கு தோற்றுபவர்களில் பரீட்சாத்தி $A$ சித்தி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{5}$ உம் பரீட்சாத்தி $B$ சித்திபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{10}$ உம் என அனுமானிக்கப்பட்டது. இந்நிகழ்ச்சிகள் சாராதவை எனக் கருதி கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(i) இருவரும் சித்தி பெறுதல்

(ii) ஒருவரேனும் சித்திபெறுதல்

$A$ சித்தி பெறுவதை $A$ இன் மூலமும் $B$ சித்தி பெறுவதை $B$ இன் மூலமும் காட்டுவோம் அப்போது

(i) $A$ , $B$ ஆகிய இருவரும் சித்தி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $P(A \cap B)$ இன் மூலம் காட்டப்படும். சாரா நிகழ்ச்சிகள் என்பதால்

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{50}$$

(ii) $A$ அல்லது $B$ சித்திபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $P(A \cup B)$ ஆகும். அப்போது

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ என்னும் சூத்திரத்தை பிரயோகிப்பதால்

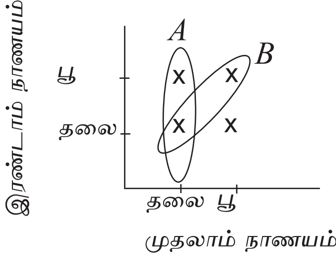
$$\therefore P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} - \frac{3}{50}$$

$$= \frac{10 + 15 - 3}{50}$$

$$= \frac{22}{50}$$

$$= \frac{11}{25}$$

**உதாரணம்** 3




முதலாம் நாணயத்தில் தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை $A$ எனவும் இரண்டு நாணயங்களிலும் சமனான பக்கம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை $B$ எனவும் கொள்வோம்.

$A$ , $B$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்று மற்றைய நிகழ்ச்சியின் நிகழ்வின் மீது தாக்கத்தை ஏற்படுத்துவதில்லை என்பதால் $A$, $B$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் சாரா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

$A$ , $B$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகளுக்குரிய நிகழ்தகவை ஆராய்வோம்.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ உம் ,}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ உம் ,}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{4} \text{ உம் ஆகும் .}$$

இங்கு $P(A).P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ என்பதால்

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ஆயின்,

$A$ , $B$ என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகளாகும்

**பயிற்சி** 30.4

**1.** $X$ , $Y$ என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகளாயிருப்பதுடன் $P(X)=\frac{1}{2}$ உம் $P(X\cap Y)=\frac{1}{3}$ உம் ஆகும்.
(i) $P(Y)$ ஐக் காண்க.
(ii) $P(X\cup Y)$ ஐக் காண்க.

**2.** கோடாத ஒரு நாணயமும் முகங்களில் 1 இலிருந்து 6 வரை எண்கள் குறிக்கப்பட்ட கோடாத ஒரு சதுரமுகித் தாயக்கட்டையும் ஒரே தடவையில் மேலே எறியப்படுகின்றன.

(அ) இப்பரிசோதனைக்குரிய மாதிரி வெளியை ஒரு நெய்யரியில் குறிக்க.
(ஆ) நாணயத்தில் தலை விழும் நிகழ்ச்சியை $A$ எனவும் தாயக்கட்டையில் எண் 4 விழும் நிகழ்ச்சியை $B$ எனவும் கொண்டு ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியையும் நெய்யரியில் கட்டமிட்டுக் காட்டி கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சிக்குமான நிகழ்தகவைக் காண்க.
(i) $P(A)$ (ii) $P(B)$ (iii) $P(A\cap B)$ (iv) $P(A\cup B)$

**3.** ஒரு பையில் ஒரே அளவிலான 3 சிவப்பு நிற மாபிள்களும் 2 நீல நிற மாபிள்களும் உள்ளன. முதலில் எழுமாறாக ஒரு மாபிளை எடுத்து அதன் நிறத்தைக் குறித்துக் கொண்ட பின்னர் மீண்டும் பையினுள்ளே இடப்பட்டு இரண்டாம் தடவையும் ஒரு மாபிள் எடுக்கப்பட்டு அதன் நிறம் குறித்துக்கொள்ளப்படுகின்றது. அதற்கேற்ப கீழே குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைக் காண்க.
(i) இரண்டு மாபிள்களும் சிவப்பு நிறமாயிருத்தல்
(ii) முதலில் ஒரு நீல நிற மாபிளும் இரண்டாவதாக ஒரு சிவப்பு நிற மாபிளும் கிடைத்தல்.
(iii) முதலில் ஒரு சிவப்பு நிற மாபிளும் இரண்டாவதாக ஒரு நீல நிற மாபிளும் கிடைத்தல்.
(iv) இரண்டு மாபிள்களும் நீல நிறமாயிருத்தல்

## 30.5 மர வரிப்படங்கள்

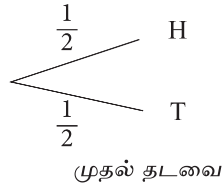
எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகளின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்பதற்கு மர வரிப்படம் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. பின்வரும் உதாரணத்தின் மூலம் அதைப் பார்ப்போம்.

**உதாரணம்** 1

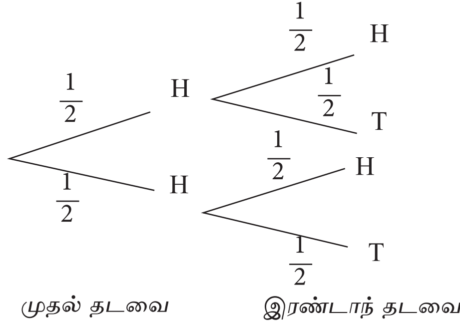
கோடாத ஒரு நாணயம் இரண்டு தடவைகள் மேலே எறியப்பட்டு ஒவ்வொரு தடவையும் பெறப்படும் பேறு குறிக்கப்படுகின்றது. உரிய மர வரிப்படத்தை வரைந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) இரண்டு தடவைகளும் தலை கிடைத்தல்.
(ii) இரண்டு தடவைகளும் ஒரே பக்கம் கிடைத்தல்.
(iii) ஒரு தடவையேனும் பூ கிடைத்தல்.
(iv) இரண்டாம் தடவை தலை கிடைத்தல்.

இப்பரிசோதனையானது இரண்டாக வகுக்கப்பட்டுள்ளது. முதலாவது பகுதி முதலாவது முயற்சியாகும். அப்போது கிடைக்கும் இரண்டு பேறுகளும் மர வரிப்படத்தில் பின்வருமாறு வகைகுறிக்கப்படும்.




அவற்றிற்குரிய நிகழ்தகவுகள் அக்கிளையில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. நாணயம் மேலே எறியும்போது கிடைக்கும் சமதகவு $\frac{1}{2}$ ஆகும். மேலும் இரண்டாவது முறை எறியும்போது கிடைக்கும் பெறுமானத்தைக் காட்டுவதற்கு நாம் இதன் தொடர்சியைப் பார்போம்.




இங்கும் நிகழ்தகவுகள் கிளைகளில் காட்டப்பட்டுள்ளன. 1 ஆவது, 2 ஆவது நிகழ்ச்சிகள் சாரதாவை என்பதால் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ ஆகும். தொடக்கத்தில் இருந்து இறுதிவரை 4 வழிகள் காணப்படுகின்றது.

அதாவது,

1. முதலாம் தடவை தலை கிடைத்தலும் இரண்டாந் தடவை தலை கிடைத்தலும்.
2. முதலாம் தடவை தலை கிடைத்தலும் இரண்டாந் தடவை பூ கிடைத்தலும்.
3. முதலாம் தடவை பூ கிடைத்தலும் இரண்டாந் தடவை தலை கிடைத்தலும்.
4. முதலாம் தடவை பூ கிடைத்தலும் இரண்டாந் தடவை பூ கிடைத்தலும்.

கிடைக்கக்கூடிய எல்லாப் பெறுமானங்களும் மேலே வகைகுறிகப்பட்டுள்ளன.

இரண்டு தடவையும் சாரதவை என்பதால் ஒவ்வொரு பெறுமான நிகழ்தகவையும் காண்பதற்கு அவற்றிற்குரிய நிகழ்தகவுகளை பெருக்குவதால் பெறலாம்.

அதாவது, $P$ (1 ஆம் தடவை தலை கிடைத்தலும் 2 ஆம் தடவை தலை கிடைத்தலும்)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{4}$$

இதேபோல்

$P$ (1 ஆம் தடவை தலை கிடைத்தலும் 2 ஆம் தடவை பூ கிடைத்தலும்) $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P$ (1 ஆம் தடவை பூ கிடைத்தலும் 2 ஆம் தடவை பூ கிடைத்தலும்) $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P$ (1 ஆம் தடவை பூ கிடைத்தலும் 2 ஆம் தடவை தலை கிடைத்தலும்) $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

இதற்கான மாதிரிவெளி $S$ ஆவது,

$$S = \{(\text{H, H}), (\text{H, T}), (\text{T, H}), (\text{T, T})\}$$

சுருக்கமாகக் கூறின்

$$P\ (\text{H, H}) = \frac{1}{4}$$

$$P\ (\text{H, T}) = \frac{1}{4}$$

$$P\ (\text{T, H}) = \frac{1}{4}$$

$$P\ (\text{T, T}) = \frac{1}{4}$$

தற்போது வினாக்களுக்கான விடைகளைப் பார்போாம்.

(i) $P$ ( இரண்டு தடவையும் தலை கிடைத்தல் ) $= P(HH)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(ii) $P$ (இரண்டு தடவையும் ஒரே பக்கம் கிடைத்தல் ) $= P(HH \text{ or } TT)$

$$= P(HH) + P(TT)$$ (இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் தம்முள் புறநீக்குவதால்)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(iii) $P$ (ஒரு தடவையேனும் பூ கிடைத்தல்) $= 1 - P$ (இரண்டு தடவையும் தலை விழுதல்)

$= 1 - P\,(\mathrm{H, H}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(iv) $P$ (இரண்டாம் தடவை தலை கிடைத்தல்) $= P\ (\mathrm{H, H}) \cup\ (\mathrm{T, H})$

$= P\ (\mathrm{H, H}) + P(\mathrm{T, H})$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

**பயிற்சி 30.5**

**1.** ஒரு பெட்டியில் 4 சிவப்புப் பென்சில்களும் 2 கறுப்புப் பென்சில்களும் உள்ளன. இப்பெட்டியிலிருந்து எழுமாறாக ஒரு பென்சில் எடுக்கப்பட்டு அதன் நிறம் குறிக்கப்பட்டு மீண்டும் பெட்டியினுள் இட்டு இரண்டாம் தடவை ஒரு பென்சிலை எடுக்கும் ஒரு பரிசோதனைக்குரிய மாதிரி வெளியை மர வரிப்படத்தில் குறித்து அதிலிருந்து

(i) இரண்டு பென்சில்களும் சிவப்பு நிறமுடையவனவாய் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) இரண்டு பென்சில்களும் வெவ்வேறு நிறங்களையுடையவனவாய் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iii) ஒரே நிறத்திலான இரண்டு பென்சில்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

**2.** மோகன், காசிம் ஆகியோர் ஒரே நிறுவனத்தில் வேலை செய்யும் இருவர் ஆவர். அத்துடன் அவர்கள் இருவரும் பேருந்தில் பயணம் செய்பவர்கள். மோகன் நிறுவனத்திற்கு தாமதமாய் வருவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ ஆவதுடன் காசிம் நிறுவனத்திற்கு தாமதமாய் வருவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ ஆகும். குறித்த ஒரு தினத்தில் இவர்கள் இருவரும் தாமதமாய் வருவதைக் காட்டும் மாதிரிவெளியைக் காண்க. ஒரு மர வரிப்படத்தில் குறித்து பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(i) இருவரும் உரிய நேரத்திற்கு வருகை தருதல்

(ii) ஒருவரேனும் தாமதமாகி வருதல்

**3.** ஒரு வலைப்பந்தாட்டக் குழுவில் உள்ள வீராங்கனை பந்தை சரியாகப்போடும் நிகழ்தகவு $\frac{3}{5}$ ஆகும். இவ்வாறு இரண்டு தடவைகளில் பந்தை சரியாகப் பேற்றுக்குள் போடுவதைக் காட்டும் மாதிரி வெளியை ஒரு மர வரிப்படத்தில் காட்டி கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்தகவுகளையும் காண்க.

(i) இரண்டு சந்தர்ப்பங்களிலும் சரியாகப் பேற்றுக்குள் இடுதல்

(ii) ஒரு சந்தர்ப்பத்திலேனும் சரியாகப் பேற்றுக்குள் இடுதல்

## பலவினப் பயிற்சி

**1.** 25 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவினரிடம் தேநீர், கோப்பி என்பவற்றை பருக விருப்பமுடையோரைப் பற்றி வினவியபோது 17 பேர் தேநீர் பருகவும் 15 பேர் கோப்பி பருகவும் 10 பேர் தேநீரும் கோப்பியும் பருகவும் விருப்பம் தெரிவித்தனர்.

(அ) இத்தகவல்களை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் குறிக்க.

(ஆ) அதிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்தினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(i) தேநீர் பருக மாத்திரம் விருப்பமுடைய ஒருவராக இருத்தல்.
(ii) ஒரு வகையை மாத்திரம் பருக விருப்பமுடைய ஒருவராக இருத்தல்.
(iii) இரண்டு வகைகளிலும் ஒரு வகையேனும் பருக விருப்பமுடையவராக இருத்தல்.
(iv) இந்த இரண்டு வகைகளையும் பருக விரும்பாத ஒருவராக இருத்தல்.

**2.** உயிரியல் பாடத்துறையையும் கணித பாடத்துறையையும் பின்பற்றும் 100 மாணவர்களைக்கொண்ட ஒரு கலவன் பாடசாலையில் ஒவ்வொரு மாணவனுக்கும் $P_1, P_2$ ஆகிய இரண்டு வருகை வினாப் பத்திரங்களில் ஒரு வகை வழங்கப்பட்டது. அதன் சரியான வகைபடுத்தல் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

| வினாப்பத்திர வகை | பால் | உயிரியல் பிரிவு | கணிதப் பிரிவு |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | ஆண் | 10 | 5 |
| | பெண் | 20 | 5 |
| $P_2$ | ஆண் | 30 | 10 |
| | பெண் | 15 | 5 |

ஒரு மாணவர் எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்படின் அம்மாணவர்

(i) ஒரு பெண்ணாக இருத்தல்.
(ii) கணிதத்தைப் பயிலும் ஒருவராக இருத்தல்.
(iii) $P_1$ வகை வினாப்பத்திரத்தை பெற்றவராய் இருத்தல்.
(iv) ஒரு பெண் பிள்ளை எனத் தரப்பட்டுள்ளபோது அவர் உயிரியலைக் கற்பவராக இருத்தல்.
(v) $P_2$ வகை வினாப்பப்பத்திரத்தைப் பெற்ற கணிதப் பிரிவைச் சார்ந்த ஒரு ஆண் பிள்ளையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

**3.** ''அதிர்ஷ்ட இலாபச் சீட்டுக்களில் ஒவ்வொரு 7 சீட்டுகளிலும் ஒன்றுக்கு உங்களுக்கு வெற்றி கிடைக்கும்.'' இது ஒரு வானொலி விளம்பரத்திலிருந்து பெற்ற ஒரு பகுதியாகும். இதனை செவியுற்ற ஒருவர் இவ்வதிர்ஷ்ட இலாபச் சீட்டுகளில் 2 வாங்கினார் .

(அ) அவருக்கு வெற்றி கிடைக்கத்தக்க எல்லா முறைகளையும் காட்டும் ஒரு மர வரிப்படம் வரைக.

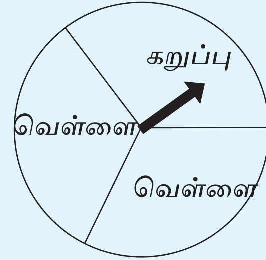
(ஆ) அதிலிருந்து

(i) இரண்டு சீட்டுகளுக்கும் வெற்றி கிடைத்தல்

(ii) ஒரு சீட்டுக்கேனும் வெற்றி கிடைத்தல்

ஆகிய நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

**4.** உருவிலுள்ளவாறு ஒரு வட்டத்தட்டானது சமனான மூன்று ஆரைச்சிறைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு இரண்டு பகுதிகளில் வெள்ளை நிறமும் ஒரு பகுதியில் கறுப்பு நிறமும் பூசப்பட்டுள்ளன. ஓர் அம்புக்குறி சுழல்வதாக மையத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. அம்புக்குறி ஒரு தடவை சுழலவிடப்பட்டு இது ஓய்வில் வரும் இடத்தின் நிறம் குறிக்கப்படுகின்றது. இவ்வாறு 2 தடவைகள் அம்புக் குறியை சுழலவிடுவதைக் காட்டுவதற்கான ஒரு மர வரிப்படத்தை வரைக. அதிலிருந்து கிழே தரப்பட்டுள்ள சந்தர்ப்பங்களுக் கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.




(i) இரண்டு சந்தர்ப்பங்களிலும் வெள்ளை நிறப் பகுதியில் அம்புக்குறி ஓய்வுக்கு வருதல்.

(ii) ஒரு சந்தர்ப்பத்திலேனும் கறுப்பு நிறப் பகுதியில் அம்புக்குறி ஓய்வுக்கு வருதல்.

**5.** ஒரு தொழில் வாய்ப்புக்காக தெரிவுசெய்யும் ஒரு போட்டிப் பரீட்சையில் தோற்றிய விண்ணப்பத்தாரிகளில் 10% தகுதி பெற்றனர். அவ்வாறு தகுதி பெற்றவர்களில் 60% இனருக்கு முதலாவது சுற்றில் வேலை வழங்கப்பட்டது. எழுமாறாக தெரிவுசெய்யப்படும் ஒருவர் முதல் சுற்றில் வேலை வாய்ப்பை பெறும் ஒருவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை மர வரிப்படம் மூலம் காண்க.

**6.** பல்தேர்வு வினாப்பத்திரம் ஒன்றில் ஒரு வினாவுக்கு 4 தேர்வுகள் உள்ளன. ஒரு வினாவுக்கு ஒரு விடை மாத்திரம் சரியானது. ஒரு மாணவன் இவ்வினாப்பத்திரத்திற்கு விடையெழுதியபோது இரண்டு வினாக்களுக்கு சரியான விடை தெரியாத காரணத்தினால் எழுமாறாக விடையளித்தான். அவன் விடையளித்த விதத்தைக் காட்டும் மரவரிப் படத்தை வரைக. அதிலிருந்து பின்வரும் நிகழ்வுகளைக் காண்க.

(i) இரண்டு வினாக்களுக்கும் சரியான விடை வழங்கியிருத்தல்.

(ii) ஒரு வினாவேனும் சரியாக இருத்தல்.

**7.** $A$, $B$ ஆகியோர் ஒரு காரியாலயத்தில் வேலைசெய்யும் இரண்டு ஊழியர்களாவர். ஒரு வாரத்திலுள்ள ஐந்து வேலை நாட்களில் அவர்கள் 1 நாள் வீதம் விடுமுறையைப் பெற்றுக்கொள்ள முடியும். அவர்கள் இருவரும் விடுமுறையைப் பெற்றுக்கொள்ளக்கூடிய சகல முறைகளையும் காட்டும் மாதிரி வெளியை ஒரு வரைபில் தருக. அதிலிருந்து பின்வருவனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) $A$ திங்கட் கிழமையும் $B$ புதன் கிழமையும் விடுமுறை பெறுதல்.

(ii) $A$ இற்குப் பின்னைய தினத்தில் $B$ விடுமுறை பெறுதல்.

(iii) இருவரும் ஒரே தினத்தில் விடுமுறை பெறுதல்.

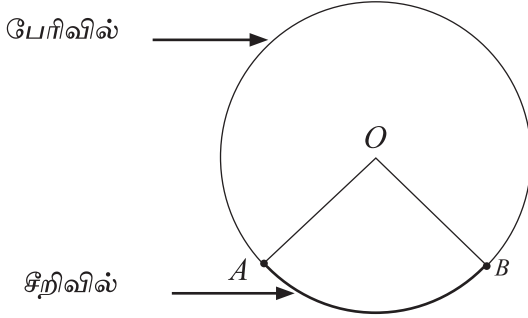
# 31 வட்டத்தின் கோணங்கள்

**இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,**

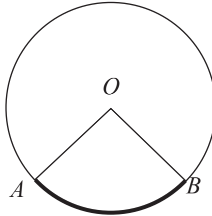
- வட்டத்தின் கோணங்கள் தொடர்பான தேற்றங்களை அறியவும் அவற்றைப் பிரயோகித்து ஏறிகளை நிறுவவும்

தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

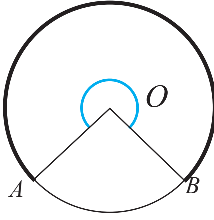
## 31.1 வட்ட வில்லொன்றினால் வட்டத்தின் மையத்திலும் வட்டத்தின் பரிதியின் மீதும் எதிரமைக்கும் கோணங்கள்




வட்டத்தின் மீதுள்ள $A$ , $B$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளினால் வட்டத்தின் பரிதி இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. இப்பகுதிகள் விற்கள் எனப்படும். $A$ ஐயும் $B$ ஐயும் இணைக்கும் நேர்கோடானது வட்டத்தின் மையத்தினூடாகச் செல்லும்போது, அதாவது வட்டத்தின் விட்டமாகும்போது இவ்விற்கள் நீளத்தில் சமனானவை ஆகும். அவ்வாறு செல்லாதபோது இரண்டு விற்களும் நீளத்தில் சமனற்றவை ஆகும். நீளத்தில் சிறிய வில் **சீறிவில்** எனவும் நீளத்தில் பெரிய வில் **பேரிவில்** எனவும் அழைக்கப்படும்.

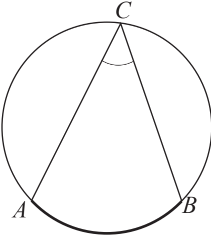



மேலேயுள்ள உருவில் கடும் நிறத்தினால் காட்டப்பட்டுள்ள சீறிவில்லின் இரு அந்தங்களையும் வட்டத்தின் மையத்துடன் இணைப்பதால் உருவாகும் கோணம் $A\hat{O}B$ ஆனது சீறிவில் $AB$ இனால் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் என அழைக்கப்படும்.

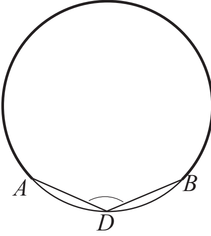



அருகிலுள்ள உருவில் கடும் நிறத்தினால் காட்டப்பட்டுள்ள பேரி வில்லின் இரு அந்தங்களையும் வட்டத்தின் மையத்துடன் இணைப்பதால் உருவாகும் கோணமாகிய பின்வளைகோணம் $A\hat{O}B$ ஆனது பேரிவில் $AB$ இனால் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் என அழைக்கப்படும்.

**குறிப்பு** : பேரிவில்லினால் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் எப்போதும் பின்வளை கோணமாகும்.

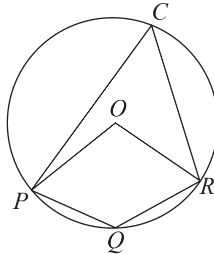



$C$ என்பது பேரிவில் $AB$ இன் மீதுள்ள யாதாயினுமொரு புள்ளி எனக் கொள்வோம். சிறிவில் $AB$ இன் இரு அந்தங்களையும் பேரிவில்லின் மீதுள்ள புள்ளி $C$ உடன் இணைப்பதன்மூலம் $A\hat{C}B$ பெறப்படும்.




அதாவது $A\hat{C}B$ என்பது சிறிவில் $AB$ இனால் பரிதியின் எஞ்சிய பகுதியின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணமாகும். இவ்வாறே, இங்கே தரப்பட்டுள்ள உருவில் $A\hat{D}B$ ஆனது பேரிவில் $AB$ இனால் பரிதியின் எஞ்சிய பகுதியின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணம் என அழைக்கப்படும்.

**உதாரணம் 1**




$O$ வை மையமாகக் கொண்ட வட்டம் உருவில் காணப்படுகின்றது.

(i) சிறிவில் $PR$ இன்மூலம்

($a$) பரிதியின் எஞ்சிய பகுதியின் மீது எதிரமைக்கும் கோணத்தையும்

($b$) வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தையும் எழுதுக.

(ii) பேரிவில் $PR$ இன்மூலம்

($a$) பரிதியின் எஞ்சிய பகுதியின் மீது எதிரமைக்கும் கோணத்தையும்

($b$) வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தையும் எழுதுக.

(i) ($a$) $P\hat{C}R$

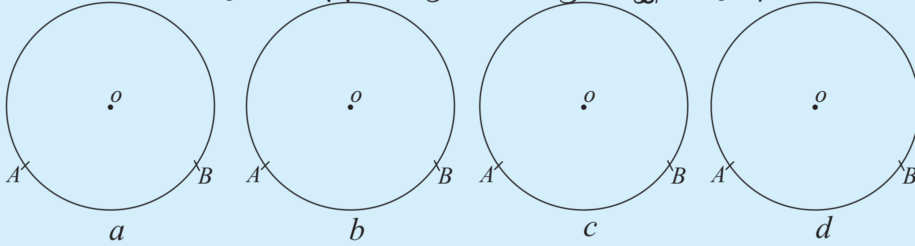
($b$) $P\hat{O}R$

(ii) ($a$) $P\hat{Q}R$

($b$) பின்வளைகோணம் $P\hat{O}R$

**பயிற்சி** 31.1

**1.** தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள 4 வட்டங்களையும் உங்களது அப்பியாசப் புத்தகத்தில் பிரதிசெய்துகொள்க. ஒவ்வொரு வட்டத்தினதும் மையத்தை $O$ எனப் பெயரிட்டு வட்டத்தின் மீது $A$ , $B$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளைக் குறிக்க.




கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் கேட்கப்பட்டுள்ள கோணத்தைக் குறிக்க.

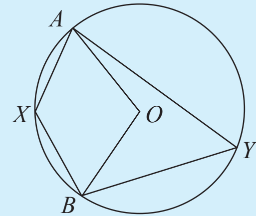
(i) உரு $a$ இல் சீறிவில் வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் ஒரு கோணத்தைக் குறிக்க.

(ii) உரு $b$ இல் சீறிவில் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் ஒரு கோணத்தைக் குறிக்க.

(iii) உரு $c$ இல் பேரிவில் வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் ஒரு கோணம்

(iv) உரு $d$ இல் பேரிவில் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம்

**2.** தரப்பட்டுள்ள உருவிலிருந்து




(i) சீறிவில் $AB$

($a$) வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் கோணம்

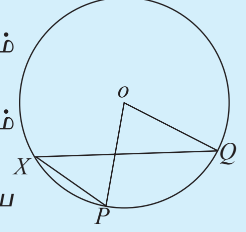
($b$) வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் ஆகியவற்றை எழுதுக.

(ii) பேரிவில் $AB$

($a$) வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் கோணம்

($b$) வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் ஆகியவற்றை எழுதுக.

**3.** தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள வட்டத்தின் மையம் $O$ ஆகும். பேரிவில் $PQ$ இன் மீது புள்ளி $X$ அமைந்துள்ளது.



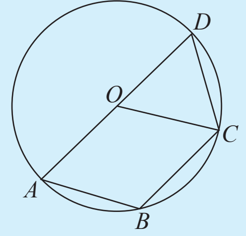

(i) சீறிவில் $PQ$ வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் கோணத்தை எழுதுக.

(ii) சீறிவில் $PQ$ வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணத்தை எழுதுக.

(iii) சீறிவில் $PQ$ இலுள்ள யாதாயினுமொரு புள்ளியை $Y$ எனப் பெயரிடுக. கோணம் $PYQ$ ஐ விபரிக்க.

(iv) பேரிவில் $P\,Q$ வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணத்தை எழுதுக.

**4.** தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள வட்டத்தின் மையம் $O$ ஆகும்.



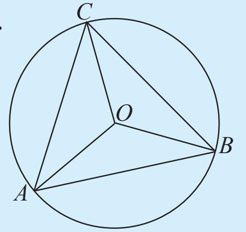

(i) சீறிவில் $AC$ வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் ஒரு கோணத்தைக் எழுதுக.

(ii) சீறிவில் $AC$ மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணத்தை எழுதுக.

(iii) பேரிவில் $AC$ வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் கோணத்தைக் எழுதுக.

(iv) பேரிவில் $AC$ வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணத்தை எழுதுக.

**5.** தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள வட்டத்தின் மையம் $O$ ஆகும்.




(i) சீறிவில் $AB$

($a$) வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் ஒரு கோணம்

($b$) வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் ஆகியவற்றை எழுதுக.

(ii) சீறிவில் $BC$

($a$) வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் ஒரு கோணம்

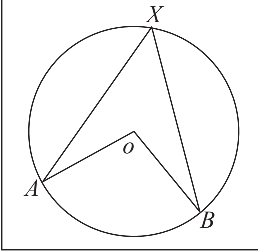
($b$) வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் ஆகியவற்றை எழுதுக.

## 31.2 வட்டமொன்றின் மையக் கோணத்திற்கும் பரிதிக் கோணத்திற்கும் இடையேயான தொடர்பு

ஒரு வட்ட வில்லானது மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணத்திற்கும் வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் கோணத்திற்கும் இடையிலுள்ள தொடர்பை ஓர் எளிய செயற்பாட்டினூடாக அறிந்து கொள்வோம்.

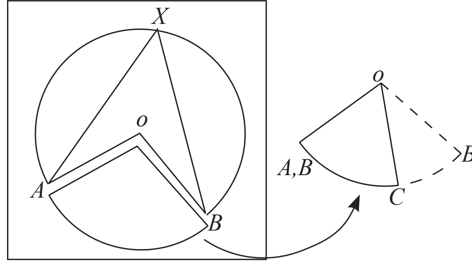
**செயற்பாடு**

ஒரு திசுத் தாளில் வட்டமொன்றை வரைந்து மையத்தை $O$ எனப் பெயரிடுக. ஒரு சீறிவில்லும் ஒரு பேரிவில்லும் பெறப்படுமாறு வட்டத்தின் மீது இரண்டு புள்ளிகளைக் குறிக்க. அப்புள்ளிகளை $AB$ எனப் பெயரிடுக.




பேரிவில்லின் மீது ஒரு புள்ளியைக் குறித்து அதனை $X$ எனப் பெயரிடுக.

சீறிவில் $AB$இனால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தை அறிந்து கொள்க. அது $A\hat{O}B$ ஆகும். கீழே உள்ள உருவில் தரப்பட்டுள்ளவாறு ஆரைச்சிறை $AOB$ ஐ வெட்டி வேறாக்கிக் கொள்க.




- $A\hat{O}B$ இன் அரைவாசியைப் பெற்றுக் கொள்வதற்காக வேறாக்கிய ஆரைச்சிறை $AOB$ ஐ $OA$ இன் மீது $OB$ பொருந்துமாறு இரண்டாக மடிக்க.
- மடித்த ஆரைச்சிறையை $A\hat{X}B$ இன்மீது வைத்து அவதானிக்க.

அதாவது சீறிவில் $AB$ இனால் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணமாகிய $A\hat{O}B$ ஆனது அவ்வில்லினால் வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கப்படும் $A\hat{X}B$ இன் இருமடங்காகிறது என்பது செயற்பாட்டின் மூலம் நிரூபிக்கப்பட்டிருக்கும் .

மேற்குறித்தவாறே வெவ்வேறு ஆரைகளையுடைய வட்டங்களில் வெவ்வேறு நீளங்களிலான விற்களைக் குறித்து மேற்குறித்த செயற்பாட்டை மீண்டும் செய்க.

மேற்குறித்த செயற்பாடுகளில் ஒரு வட்ட வில்லினால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணமானது அவ்வில்லினால் வட்டத்தின் எஞ்சிய வில்லின்மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தின் இரண்டு மடங்காகும் என்பதை அவதானிக்கக்கூடியதாயிருக்கும்.

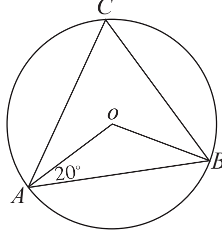
இப்பேறானது ஒரு கேத்திரகணித முடிவாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

**தேற்றம்**

ஒரு வட்டவில்லினால் வட்டத்தின் மையத்தின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணம், அவ்வில்லினால் வட்டத்தின் எஞ்சிய பரிதியின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தின் இரண்டு மடங்காகும்.

மேற்குறித்த தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கணித்தல்களைச் செய்யும் முறைபற்றி கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்கள் மூலம் ஆராய்வோம்.

$O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீது $A, B, C$ ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. $O\hat{A}B = 20^\circ$ ஆயின் $A\hat{C}B$ இன் பெறுமானம் காண்போம்.




$OA = OB$ (ஒரு வட்டத்தின் ஆரைகள் சமனானவை.)

$\therefore$ முக்கோணி $OAB$ ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியாகும். ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியில் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமனானவை என்பதால்

$$O\hat{A}B = O\hat{B}A$$

$$\therefore\ O\hat{B}A = 20^\circ \text{ ( } O\hat{A}B = 20^\circ \text{ என்பதால் )}$$

ஒரு முக்கோணியின் 3 அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180^\circ$ என்பதால்

$$A\hat{O}B + O\hat{A}B + O\hat{B}A = 180^\circ \text{ ஆகும்.}$$

$O\hat{A}B = 20^\circ,\ O\hat{B}A = 20^\circ$ என்பவற்றை சமன்பாட்டில் பிரதியிடுவதால்,

$$A\hat{O}B + 20^\circ + 20^\circ = 180^\circ$$

$$A\hat{O}B + 40^\circ = 180^\circ$$

$$A\hat{O}B = 180^\circ - 40^\circ$$

$$A\hat{O}B = 140^\circ$$

சிறிவில் $AB$ இனால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் $A\hat{O}B$ ஆகும். இவ்வில்லினால் வட்டத்தின் எஞ்சிய வில்லின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணம் $A\hat{C}B$ என்பதால் தேற்றத்தின்படி

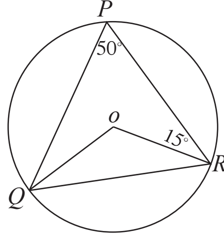
$$2\,A\hat{C}B = A\hat{O}B$$

$$\therefore A\hat{C}B = \frac{140^\circ}{2}$$

$$\therefore A\hat{C}B = 70^\circ$$

**உதாரணம்** 1

உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் மையம் $O$ ஆகும். தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து $P\hat{Q}R$ ஐக் காண்க.




$Q\hat{O}R = 2\,Q\hat{P}R$ ( ஒரு வட்டத்தின் வில்லினால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் அவ்வில்லினால் வட்டத்தின் எஞ்சிய வில்லின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தின் இருமடங்காகும்.)

$$\therefore Q\hat{O}R = 2 \times 50^\circ$$

$$= 100^\circ$$

$\Delta\, OQR$ இல்

$O\hat{Q}R + O\hat{R}Q + Q\hat{O}R = 180^\circ$ ( ஒரு முக்கோணியின் மூன்று அகக் கோணங்களினதும் கூட்டுதொகை $180^\circ$ என்பதால் )

$$O\hat{Q}R + O\hat{R}Q + 100^\circ = 180^\circ$$

$$O\hat{Q}R + O\hat{R}Q = 80^\circ \text{ ——— } (1)$$

$OQ = OR$ ( ஒரு வட்டத்தின் ஆரைகள் சமனாகும் )

$\therefore O\hat{Q}R = O\hat{R}Q$ ( ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியில் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரான கோணங்கள் சமனானவை என்பதால் )

① இற்கேற்ப $2\,O\hat{R}Q = 80^\circ$

$$O\hat{R}Q = \frac{80}{2}$$

$$O\hat{R}Q = 40^\circ$$

$$P\hat{R}Q = P\hat{R}O + O\hat{R}Q$$

$$P\hat{R}Q = 15^\circ + 40^\circ$$

$$P\hat{R}Q = 55^\circ$$

$\Delta\, PQR$ இல்

$P\hat{Q}R + Q\hat{P}R + P\hat{R}Q = 180^\circ$ (ஒரு முக்கோணியின் 3 அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180^\circ$ என்பதால்)

$$P\hat{Q}R + 50^\circ + 55^\circ = 180^\circ$$

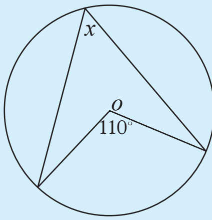
$$P\hat{Q}R + 105^\circ = 180^\circ$$

$$P\hat{Q}R = 180^\circ - 105^\circ$$

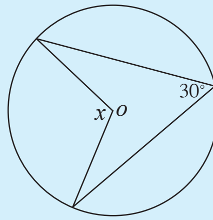
$$P\hat{Q}R = 75^\circ$$

**பயிற்சி 31.2**

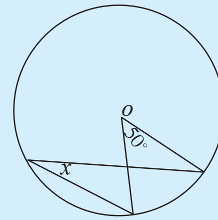
**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்திலும் மையம் $O$ இனால் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $x$ இன் பெறுமானம் காண்க.



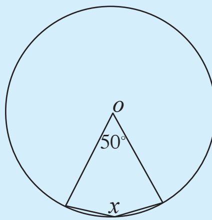
(i)



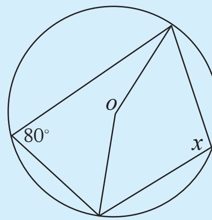
(ii)



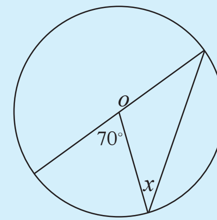
(iii)



(iv)



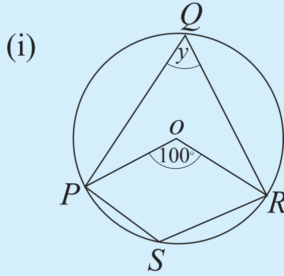
(v)



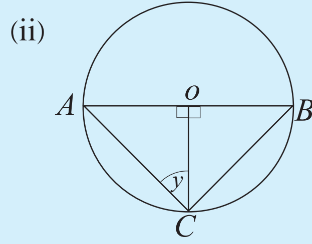
(vi)

**2.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்திலும் மையம் $O$ இனால் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப காரணங்களைக் காட்டி $y$ இன் பெறுமானம் காண்க.

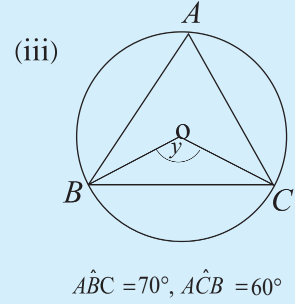
(i)




(ii)

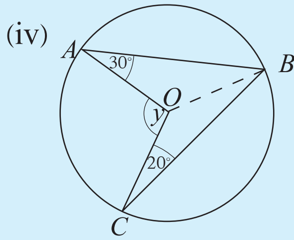



(iii)

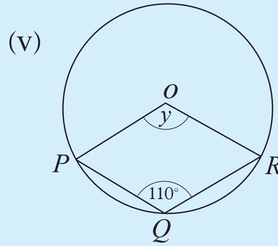



$A\hat{B}C = 70°$, $A\hat{C}B = 60°$

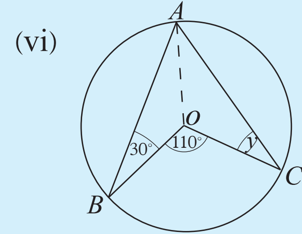
(iv)



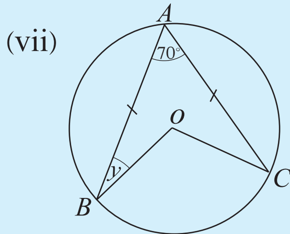

(v)



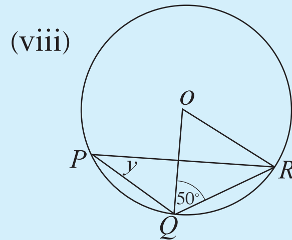

(vi)



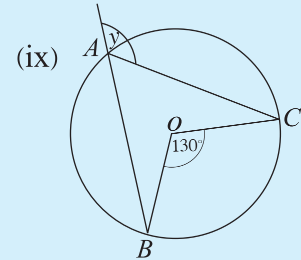

(vii)




(viii)



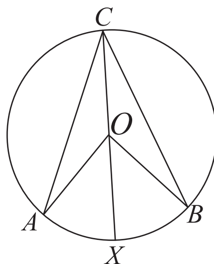

(ix)

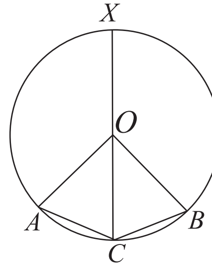



---

**"ஒரு வட்டத்தின் வில்லினால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் அவ்வில்லினால் பரிதியின் எஞ்சிய பகுதியின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தின் இருமடங்காகும் "** என்னும் தேற்றத்தின் முறையான நிறுவல்

---



**தரவு** :- $O$ ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தின் மீது $A,B,C$ ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.

**நிறுவ வேண்டியது**: $A\hat{O}B = 2\,A\hat{C}B$

**அமைப்பு**:- கோடு $CO$ ஐ $X$ வரை நீட்டுக.

**நிறுவல்** :- $OA = OC$ (ஒரே வட்டத்தின் ஆரைகள் சமன்)

$O\hat{A}C = O\hat{C}A$ ① ( முக்கோணி ஒன்றின் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரான கோணங்கள்)

$O\hat{A}C + O\hat{C}A = X\hat{O}A$ —— ② (ஒரு முக்கோணியின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டுவதால் உண்டாகும் புறக்கோணம் அகத்தெதிர்க் கோணங் கள் இரண்டினதும் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன் என்பதால்)

①, ② என்பவற்றால் $X\hat{O}A = 2\;O\hat{C}A$ —— ③

இவ்வாறே $X\hat{O}B = 2\;O\hat{C}B$ —— ④

③, ④ இதற்கேற்ப $\underbrace{X\hat{O}A + X\hat{O}B} = 2\;O\hat{C}A + 2\;O\hat{C}B$

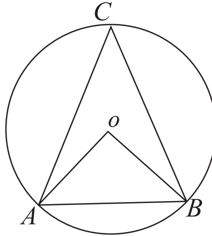
$$A\hat{O}B = 2\;\underbrace{(O\hat{C}A + O\hat{C}B)}$$

$$A\hat{O}B = 2\;A\hat{C}B$$

மேலே நிறுவிய தேற்றதிலிருந்து ஒத்த பிரசினங்களை நிறுவும் முறை பற்றி இனிப் பார்ப்போம்

**உதாரணம் 2**

$O$ ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தின் மீது $A,B,C$ ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. $A\hat{C}B + A\hat{B}C = A\hat{O}B$ ஆயின் $AC = AB$ எனக் காட்டுக.




நிறுவல்- $A\hat{C}B + A\hat{B}C = A\hat{O}B$ —— ① (தரப்பட்டுள்ளது)

$2A\hat{C}B = A\hat{O}B$ —— ② (ஒரு வட்டவில்லானது மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் அவ்வில் வட்டத்தின் எஞ்சிய பரிதியின்மீது எதிரமைக்கும் கோணத்தின் இருமடங்காகும்).

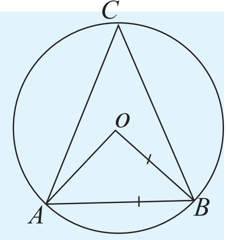
(1), (2) என்பவற்றிலிருந்து $2A\hat{C}B = A\hat{C}B + A\hat{B}C$

$$2A\hat{C}B - A\hat{C}B = A\hat{B}C$$

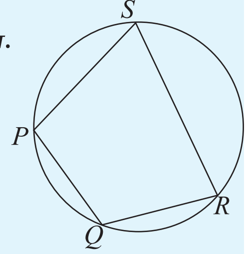
$$A\hat{C}B = A\hat{B}C$$

எனவே, $AC = AB$ (ஒரு இருசமபக்க முக்கோணியில் சமனான கோணங்களுக்கு எதிரான பக்கங்கள் சமனானவை என்பதால்)

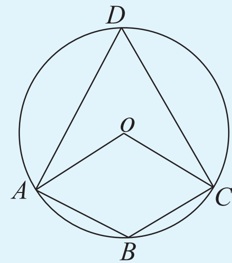
**பயிற்சி 31.3**



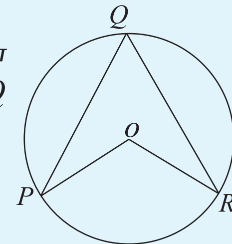

**1.** $O$ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீது $A$, $B$, $C$ ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. $OB = AB$ ஆயின் $A\hat{C}B = 30^\circ$ எனக் காட்டுக.




**2.** ஒரு வட்டத்தின் மீது $P,Q,R,S$ ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. $P\hat{Q}R + P\hat{S}R = 180^\circ$ என நிறுவுக.

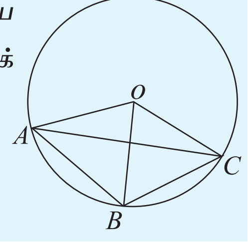



**3.** $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீது $A,B,C,D$ ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. $A\hat{O}C = A\hat{B}C$ ஆயின் $A\hat{D}C = 60^\circ$ எனக் காட்டுக.

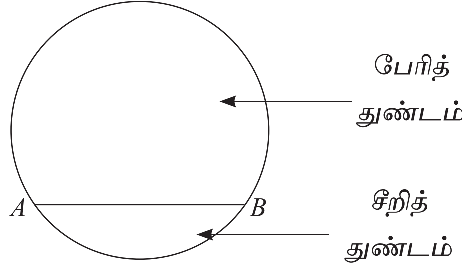



**4.** $P,Q,R$ ஆகிய புள்ளிகள் $O$ ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன. $O\hat{P}Q = O\hat{R}Q$ ஆயின் $P\hat{O}R = 4\,O\hat{R}Q$ எனக் காட்டுக. ($OQ$ ஐ இணைக்க.)

**5.** O ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீது $A$, $B$, $C$ ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. $A\hat{O}C = 2\,(B\hat{A}C + B\hat{C}A)$ எனக் காட்டுக.

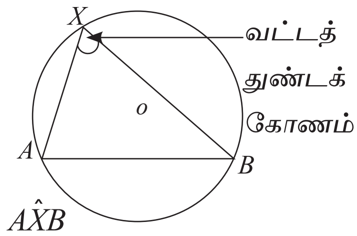



## 31.3 ஒரே வட்டத் துண்டத்திலுள்ள கோணங்களுக்கிடையிலான தொடர்பு



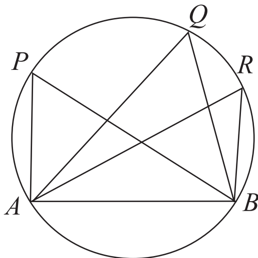

ஒரு வட்டமும் அவ்வட்டத்தில் வரையப்பட்ட நாண் $AB$ உம் உருவில் தரப்பட்டுள்ளன. அந்நாணின் மூலம் வட்டமானது இரண்டு பிரதேசங்காளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒரு பிரதேசம் நாணினாலும் பேரிவில்லினாலும் அமைக்கப்பட்ட **பேரித்துண்டமாகும்.**

மற்றைய பிரதேசம் நாணினாலும் சீறி வில்லினாலும் அமைக்கப்பட்ட **சீறித் துண்டமாகும்.**

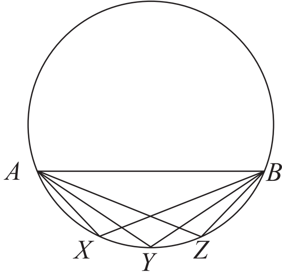



ஒரு நாணின் இரண்டு அந்தங்களையும் வட்டத் துண்டத்தின் வில்லின்மீது அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கும்போது உருவாகும் கோணம் வட்டத் துண்டக் கோணம் எனப்படும்.

வட்டத் துண்டம். $AXB$ இலுள்ள துண்டக் கோணம் ஆகும்.




$A\hat{P}B, A\hat{Q}B$ , $A\hat{R}B$ ஆகியன வட்டத்தின் பேரித் துண்டத்தைச் சேர்ந்த வட்டத் துண்டக் கோணங்களாகும். எனவே $A\hat{P}B, A\hat{Q}B$ , $A\hat{R}B$ ஆகியவை ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்கள் எனப்படும்.

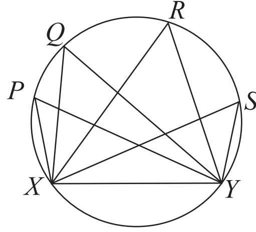



உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள $A\hat{X}B, A\hat{Y}B$ , $A\hat{Z}B$ ஆகிய கோணங்கள் சீறித் துண்டத்தைச் சேர்ந்த ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்களாகும்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள செயற்பாடுகளின் மூலம் ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்களுக்கு கிடையேயுள்ள தொடர்பை அறிந்து கொள்வோம்.

**செயற்பாடு** 1

- ஒரு தாளின்மீது வட்டமொன்றை வரைவோம். வட்டத்தின் மீது $X$ , $Y$ என்னும் இரண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து நாண் $XY$ ஐ வரைக.
- பேரித் துண்டத்தின் வில்லின் மீது $P, Q, R, S$ ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்க. அப்புள்ளிகளை நாண் $XY$ இன் இரண்டு அந்தங்களுடனும் தொடுக்க. அப்போது பேரித் துண்டத்தைச் சேர்ந்த $X\hat{P}Y, X\hat{Q}Y, X\hat{R}Y, X\hat{S}Y$ ஆகிய ஒரே துண்டக் கோணங்கள் பெறப்படும்.




வரைந்த ஒரேதுண்டக் கோணங்களைப் பாகைமானியால் அளக்க. மேற்குறிப்பிட்டவாறு வட்டத்தின் சீறித் துண்டத்தைச் சேர்ந்த வட்டத் துண்டத்தில் சில கோணங்களை வரைந்து அக்கோணங்களை அளந்து பெறப்படும் பெறுமானங்களையும் பரீட்சித்துப் பாருங்கள்.

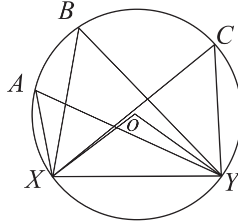
ஒரே வட்டத்துண்டத்திலுள்ள கோணங்கள் அளவில் சமனானவை என்பதை நீங்கள் அவதானிக்க முடியும்.

இச்செயற்பாடுகளில் ஈடுபடுவதன்மூலம் ஒரே வட்டத்துண்டத்திலுள்ள கோணங்கள் சமனானவை என்பதை அறிந்துகொண்டிருப்பீர்கள்.

அது ஒரு தேற்றமாக கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

**தேற்றம் :-** ஒரே வட்டத்துண்டக் கோணங்கள் சமனானவை ஆகும்.

இத்தேற்றத்தை கேத்திர கணித நிறுவலின் மூலம் உறுதிப்படுத்திக் கொள்வோம்.




**தரவு:-** $O$ ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தின் நாண் $XY$ அமைந்துள்ள அதே பக்கத்தில் வட்டத்தின் மீது $A$, $B$, $C$ ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.

**நி. வே:-** $X\hat{A}Y = X\hat{B}Y = X\hat{C}Y$

**அமைப்பு:-** $OX$ ஐயும் $OY$ ஐயும் இணைக்க.

**நிறுவல்:-** $X\hat{O}Y = 2\,X\hat{A}Y$ —— ① (ஒரு வட்டத்தின் வில்லினால் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் பரிதியின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தின் இரு மடங்காகும்.)

$X\hat{O}Y = 2\,X\hat{A}Y$ ——— ①

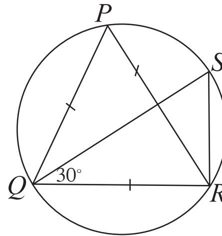
$X\hat{O}Y = 2\,X\hat{B}Y$

$X\hat{O}Y = 2\,X\hat{C}Y$ ——— ②

①,②,③ என்பவற்றிலிருந்து $2\,X\hat{A}Y = 2\,X\hat{B}Y = 2\,X\hat{C}Y$

$X\hat{A}Y = X\hat{B}Y = X\hat{C}Y$

மேலே தரப்பட்டுள்ள தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கணித்தல்கள் செய்யப்படும் முறையைக் கவனிப்போம்.




மேலேயுள்ள உருவில் $PQ = QR = PR$ உம் $R\hat{Q}S = 30^\circ$ உம் ஆகும். $Q\hat{R}S$ இன்

பெறுமானம் காண்போம்.

$PQ = QR = PR$ (தரப்பட்டுள்ளது)

முக்கோணி $PQR$ ஒரு சமபக்கமுக்கோணியாகும்.

ஒரு சமபக்க முக்கோணியில் ஓர் அகக் கோணத்தின் பெறுமானம் $60^0$ என்பதால்

$Q\hat{P}R = 60^\circ$

ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்கள் சமன் என்பதால்

$Q\hat{P}R = Q\hat{S}R$

$\therefore Q\hat{S}R = 60^\circ$

ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180^0$ என்பதால்

$\Delta\, QRS$ இல்

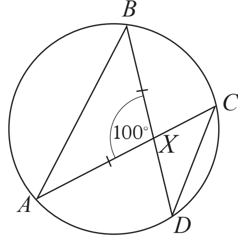
$Q\hat{R}S + R\hat{Q}S + Q\hat{S}R = 180^\circ$

$Q\hat{R}S = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ)$

$Q\hat{R}S = 90^\circ$

**உதாரணம்** 1

உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கமைய $B\hat{D}C$ இன் பெறுமானம் காண்க.




$XB = XA$ என்பதால், $XAB$ என்பது ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணியாகும்.

$X\hat{B}A = X\hat{A}B$ —— ① (ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியில் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமனானவை ஆகும்).

முக்கோணி $XAB$ இல்

$X\hat{B}A + X\hat{A}B + A\hat{X}B = 180^\circ$ (ஒரு முக்கோணியின் மூன்று அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180^0$ என்பதால்)

எனவே $X\hat{B}A + X\hat{A}B + 100^\circ = 180^\circ$

$$X\hat{B}A + X\hat{A}B = 180^\circ - 100^\circ$$

$$X\hat{B}A + X\hat{A}B = 80^\circ$$

① இலிருந்து $2\,X\hat{A}B = 80^\circ$

$$X\hat{A}B = 40^\circ$$

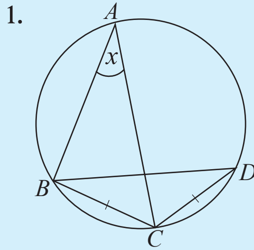
ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்கள் சமன் என்பதால்

$$X\hat{A}B = B\hat{D}C$$

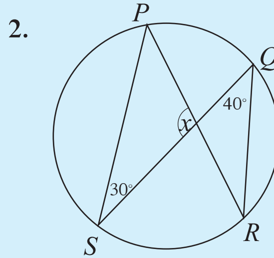
$$B\hat{D}C = 40^\circ$$

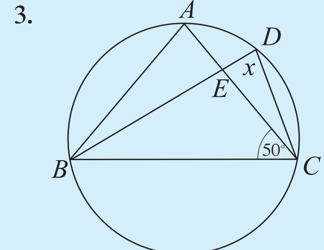
**பயிற்சி 31.3**

**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள வினாக்களில் $x$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

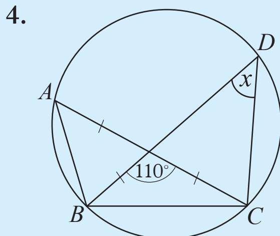
1.


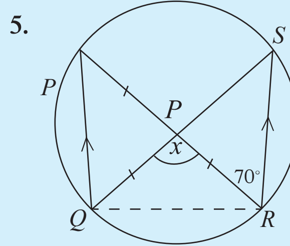

$B\hat{C}D = 110^\circ$

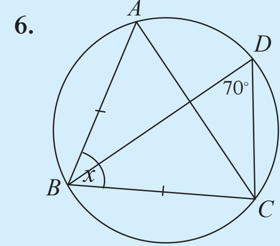
2.


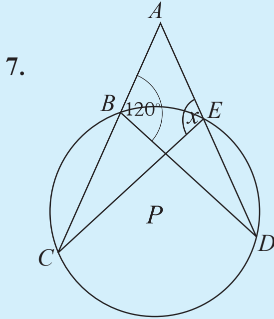

3.


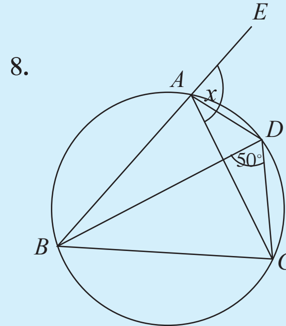

$AB = AC$

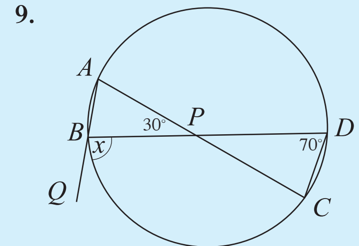
4.



5.



6.



7.


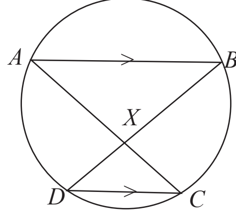

8.



9.


## 31.5 ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்கள் சமனானவை என்னும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஏறிகளை நிறுவோம்

**உதாரணம்** 1

உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $AC = BD$ என நிறுவுக.




$A\hat{B}D = B\hat{D}C$ ($AB//CD$, ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

$A\hat{B}D = A\hat{C}D$ (ஒரே வட்டத்தின் துண்டக் கோணங்கள்)

$\therefore B\hat{D}C = A\hat{C}D$

ஒரு முக்கோணியில் சமனான கோணங்களுக்கு எதிரான பக்கங்கள் சமனானவை

$\Delta\, CDX$ இல் $XD = XC$

$B\hat{A}C = A\hat{C}D$

$A\hat{B}D = A\hat{C}D$ ($AB//CD$, ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

$\therefore \quad B\hat{A}C = A\hat{B}D$

ஒரு முக்கோணியில் சமனான கோணங்களுக்கு எதிரான பக்கங்கள் சமனானவை

$\therefore \; XA = XB$

$\therefore \Delta \; ABX$ இல்

$XA = XB$ (நிறுவியது)

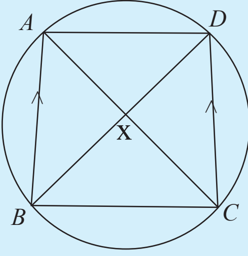
$XC = XD$ (நிறுவியது)

$\therefore \; \underbrace{XA + XC} = \underbrace{XB + XD}$

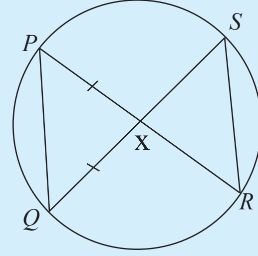
$AC = BD$

**பயிற்சி 31.5**

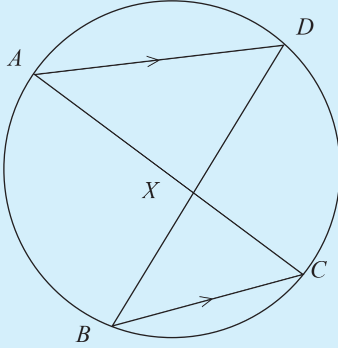
1. $AB//CD$ எனின் $A\hat{D}C = B\hat{C}D$ எனக் காட்டுக.



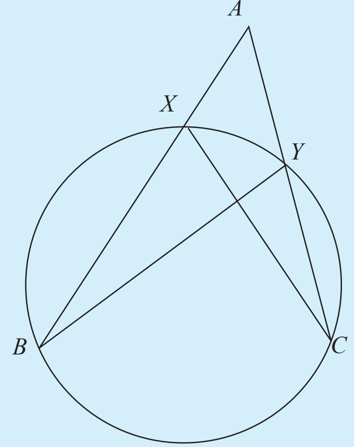

2. $PX = QX$ ஆயின் $PQ // SR$ எனக் காட்டுக.



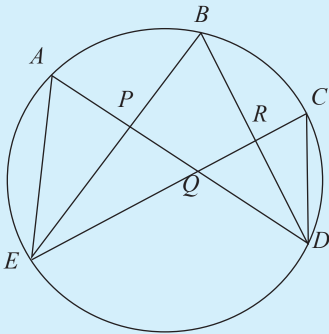

3. $AD // BC$ ஆயின் $AX = DX$ எனக் காட்டுக.



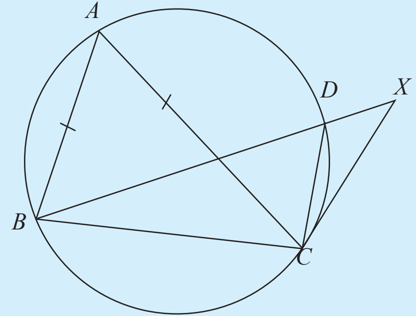

4. $A\hat{X}C = A\hat{Y}B$ எனக் காட்டுக.



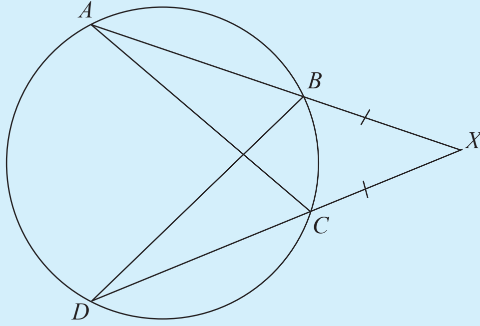

5. $B\hat{P}Q = B\hat{R}Q$ ஆயின் $A\hat{E}C$ இன் இருசமகூறாக்கி $BE$ எனக் காட்டுக.



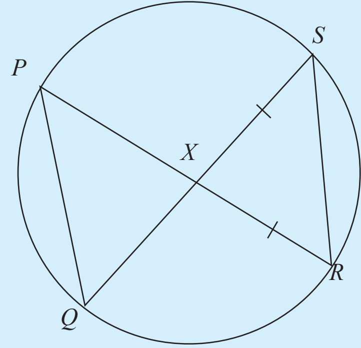

6. $AB = AC$ ஆயின் $C\hat{D}X = 2\,A\hat{B}C$ எனக் காட்டுக.



**7.** $XB=XC$ ஆயின் $AC=BD$ எனக் காட்டுக.

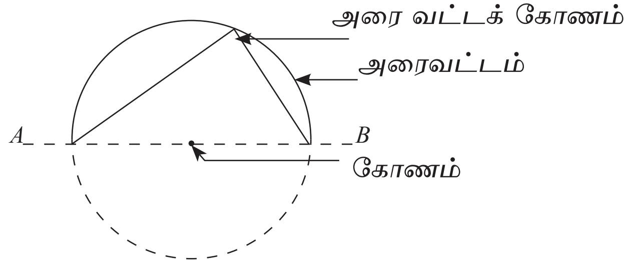



8. $XS=XR$ ஆயின் $XP=XQ$ எனக் காட்டுக.




## 31.5 அரை வட்டத்திலுள்ள கோணங்கள்

ஒரு வட்டத்தின் அரைவாசியாகவுள்ள வட்ட வில்லானது அரை வட்டமெனப்படும்



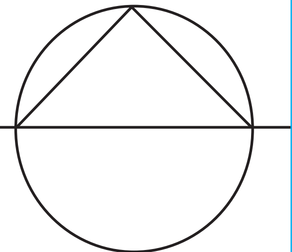

அரைவட்டத்தின்மீதுள்ள ஒரு புள்ளியை அரைவட்டத்தின் இரண்டு அந்தங்களுடனும் இணைப்பதன்மூலம் உருவாகும் கோணம் அரைவட்டக் கோணம் எனப்படும்.

வட்டத்தின் மையத்தினூடாக ஒரு கோட்டை வரைவதன் மூலம் வட்டமானது இரண்டு அரைவட்டப் பகுதிகளாக வேறுபடுத்தப்படுகின்றது.

அரைவட்டத்தில் கோணங்களின் பண்புகளை அறிந்து கொள்வதற்காக கீழே தரப்பட்டுள்ள செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

**செயற்பாடு** 1

- கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு தாளின் மீது ஒரு வட்டத்தை வரைந்து கொள்வோம். அவ்வட்டத்தின் மையத்தினூடாக நேர்கோடொன்றை வரைவோம். அப்போது வட்டமானது இரண்டு அரைவட்டங்களாகப் பிரிக்கப்படும்.

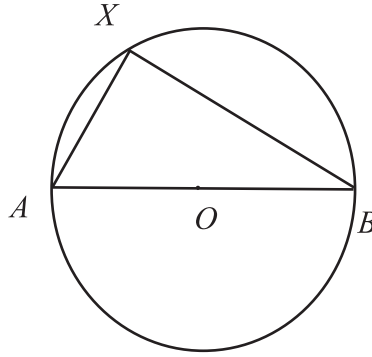


- ஓர் அரைவட்டத்தின்மீது ஒரு புள்ளியைக் குறிப்போம். அப்புள்ளியை அரை வட்டத்தின் இரண்டு அந்தங்களுக்கும் தொடுப்போம். அப்போது வட்டவில்லின்மீது அரைவட்டக் கோணம் பெறப்படும்.

- பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி அரைவட்டக் கோணத்தின் பருமனை அளக்க.

அரைவட்டக் கோணம் $90^\circ$ எனக் கண்டிருப்பீர்கள். இவ்வாறே இன்னும் சில வட்டங்களை வரைந்து அவற்றின் அரைவட்டக் கோணங்களை வரைந்து பெறுமானத்தை அளக்க. மேற்குறித்த செயற்பாட்டில் ஓர் அரைவட்டக் கோணம் எப்போதும் ஒரு செங்கோணம் என நீங்கள் அவதானிக்கக்கூடியதாயிருக்கும்.

மேலே தரப்பட்ட தொடர்பை நிறுவலின் மூலம் உறுதிபடுத்திக் கொள்வோம்.




**தரவு** :- $O$ வை மையமாகவுடைய வட்டத்தில் $X$, $Y$ ஆகியன உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு இரு புள்ளிகளாகும்.

**நி.வே.** :- $A\hat{X}B$ ஒரு செங்கோணம்.

**நிறுவல்** :- $A\hat{O}B$ என்பது வில் $AYB$ இனால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணமாகும்.

அரைவட்டம் என்பதால் $AOB$ விட்டமாகும்.

$A\hat{O}B = 2$ செங்கோணங்களாகும். ________ ①

வில் $AYB$ இனால் வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியின்மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணம் $A\hat{X}B$ ஆகும். ஒரு வட்டத்தில் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் அவ்வில் வட்டத்தின்மீது எதிரமைக்கும் கோணத்தின் இரு மடங்காகும்.

$A\hat{O}B = 2\,A\hat{X}B$ ________ ②

② ,① என்பவற்றிலிருந்து

$2\ A\hat{X}B = 2$ செங்கோணங்களாகும்.

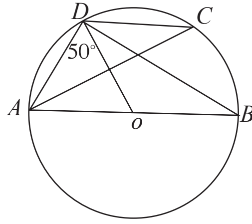
$\therefore A\hat{X}B$ ஒரு செங்கோணமாகும்.

மேற்குறித்த நிறுவலின்மூலம் உறுதிப்படுத்திய தொடர்பு ஒரு தேற்றமாகத் தரப்பட்டுள்ளது.

> **தேற்றம்**
>
> ஓர் அரைவட்டக் கோணம் செங்கோணமாகும்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்கள் மூலம், மேற்குறித்த தேற்றத்திலிருந்து கணித செய்கைகளைச் செய்யும் முறையை அறிந்து கொள்வோம்.

உருவில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து $A\hat{C}D$ இன் பெறுமானம் காண்போம்.




$A\hat{D}B = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம்)

$A\hat{D}B = A\hat{D}O + O\hat{D}B$

$\therefore A\hat{D}O + O\hat{D}B = 90^\circ$

$50^\circ + O\hat{D}B = 90^\circ$

$O\hat{D}B = 90^\circ - 50^\circ$

$O\hat{D}B = 40^\circ$

ஒரே வட்டத்தின் ஆரைகள் என்பதால்.

$DO = OB$

ஒரு முக்கோணியின் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமன் என்பதால்

$\Delta\, OBD$ இல்

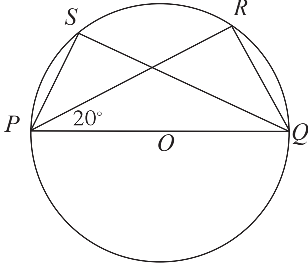
$D\hat{B}O = O\hat{D}B$

$\therefore D\hat{B}O = 40^\circ$

$D\hat{B}O = A\hat{C}D$ (வட்டத்தின் ஒரே துண்டக் கோணங்கள்)

$\therefore A\hat{C}D = 40^\circ$

**உதாரணம் 1**




வட்டம் $PQRS$ இல் $PQ$ விட்டமாகும். $Q\hat{P}R = 20^\circ$ உம் $PS = QR$ உம் எனின் $R\hat{P}S$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$\Delta\, PQR$ இல்

$P\hat{R}Q = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம்)

$P\hat{Q}R + Q\hat{P}R + P\hat{R}Q = 180^\circ$ (ஒரு முக்கோணியில் மூன்று அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180^\circ$ என்பதால்)

$P\hat{Q}R + 20^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$P\hat{Q}R = 180^\circ - 110^\circ$

$P\hat{Q}R = 70^\circ$

$PQ$ (விட்டம் என்பதால்)

$P\hat{S}Q = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம்)

$P\hat{R}Q = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம்)

$\Delta PSQ$, $\Delta\, PRQ$ என்பன செங்கோண முக்கோணிகளாகும்.

$\Delta\, PSQ$, $\Delta\, PRQ$ என்பவற்றிலிருந்து

$SP = RQ$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$PQ$ (பொதுப் பக்கம்)

$\therefore \Delta\, PSQ \equiv \Delta\, PRQ$ (செ.ப.ப)

$\therefore\ S\hat{P}Q = P\hat{Q}R$ (ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த கோணங்கள்)

$\therefore S\hat{P}Q = 70^\circ$

$R\hat{P}S + Q\hat{P}R = 70^\circ$

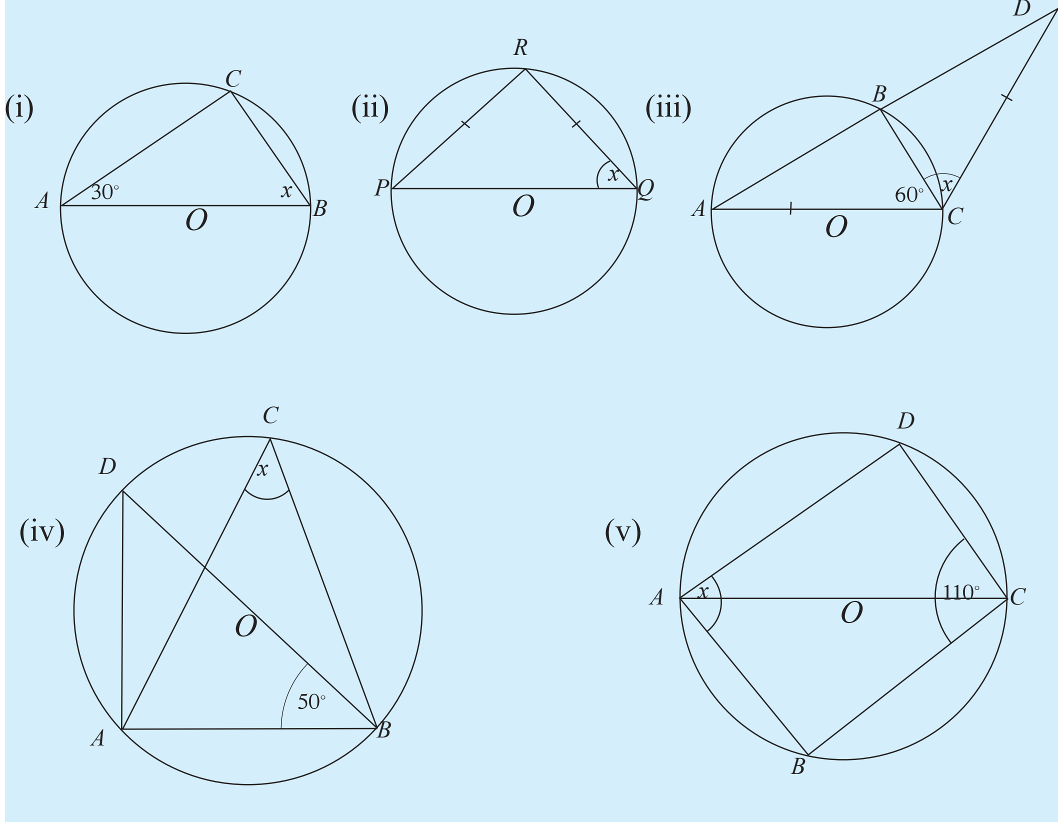
$R\hat{P}S + 20^\circ = 70^\circ$

$R\hat{P}S = 70^\circ - 20^\circ$

$R\hat{P}S = 50^\circ$

**பயிற்சி** 31.6

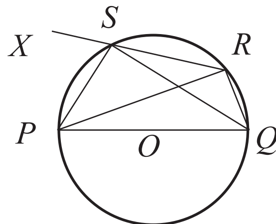
**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்திலும் மையம் $O$ இனால் காட்டப்பட்டுள்ளது. தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $x$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.




## 31.7 அரைவட்டக் கோணம் செங்கோணம் என்னும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஏறிகளை நிறுவுதல் பற்றி அறிந்து கொள்வோம்

**உதாரணம்** 1

$PQ$ என்பது வட்டம் $PQRS$ இல் ஒரு விட்டமாகும். $RS$ ஆனது $X$ வரை நீட்டப் பட்டுள்ளது. $R\hat{P}Q + P\hat{S}X = 90^{\circ}$ என நிறுவுக.



**நிறுவல்**

$Q\hat{S}R + P\hat{S}Q + P\hat{S}X = 180^\circ$ (நேர்கோட்டின் மீதுள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை என்பதால்)

$PQ$ விட்டமென்பதால் $PQRS$ ஓர் அரைவட்டமாகும்

$\therefore P\hat{S}Q = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம்)

$\therefore Q\hat{S}R + 90^\circ + P\hat{S}X = 180^\circ$

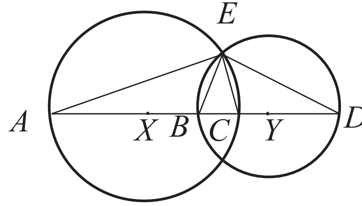
$Q\hat{S}R + P\hat{S}X = 180^\circ - 90^\circ$

$Q\hat{S}R + P\hat{S}X = 90^\circ$

$\therefore Q\hat{S}R = R\hat{P}Q$ (ஒரே வட்டத்துண்டக் கோணங்கள் சமனானவை ஆகும்).

$\therefore R\hat{P}Q + P\hat{S}X = 90^\circ$

**உதாரணம் 2**




இரண்டு வட்டங்களின் மையங்கள் $X$ , $Y$ ஆகும். $A\hat{E}B = C\hat{E}D$ எனக் காட்டுக

**நிறுவல்** :-

$A\,C$ ஆனது $X$ இனூடாக செல்வதால் $AC$ ஆனது $X$ ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தின் விட்டமாகும்.

$\therefore$ வில் $ACE$ ஆனது அரைவட்டமாகும்.

$\therefore A\hat{E}C = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம் செங்கோணம் என்பதால்)

$\therefore A\hat{E}B + B\hat{E}C = 90^\circ$ ———— ①

$BD$ ஆனது $Y$ இனூடாக செல்வதால், $BD$ ஆனது $Y$ ஐ மையமாகவுடைய விட்டமாகும்.

$\therefore$ வில் $BED$ ஆனது அரைவட்டமாகும்

$\therefore B\hat{E}D = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம் செங்கோணம் என்பதால்)

$C\hat{E}D + B\hat{E}C = 90^\circ$ ——— ②

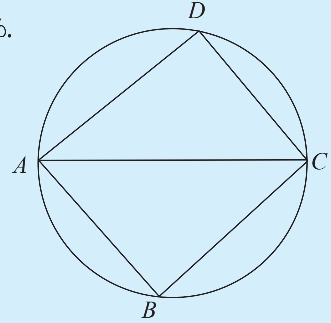
$A\hat{E}B + B\hat{E}C = C\hat{E}D + B\hat{E}C$

சமன்பாட்டின் இரண்டு பக்கங்களிலுமிருந்து $B\hat{E}C$ நீக்குவதன் மூலம்

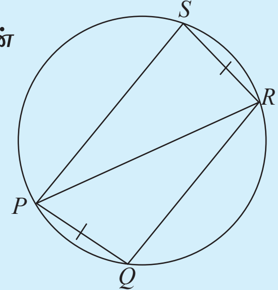
$A\hat{E}B = C\hat{E}D$

**பயிற்சி** 31.7

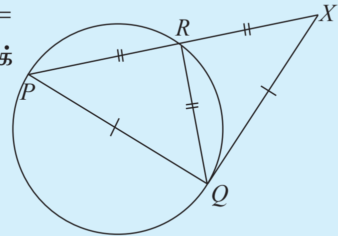
**1.** வட்டம் $ABCD$ இல் $AC$ விட்டமாகும். $B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180^\circ$ எனக் காட்டுக.



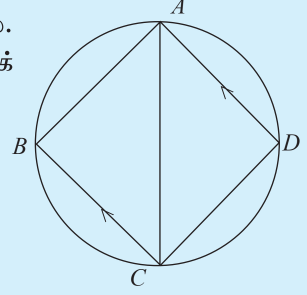

**2.** வட்டம் $PQRS$ இல் $PR$ விட்டமாகும். $PQ = RS$ ஆயின் $PQRS$ என்பது ஒரு செவ்வகம் எனக் காட்டுக.



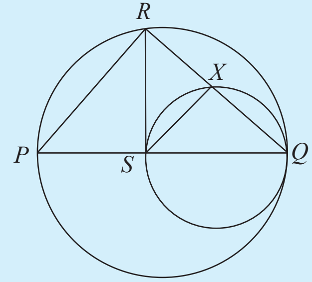

3. $PQ$ என்பது வட்டம். $PQR$ இன் விட்டமாகும். $PQ = QX$ உம் $PR = QR = RX$ உம் ஆயின் $P\hat{Q}X = 90$ எனக் காட்டுக.



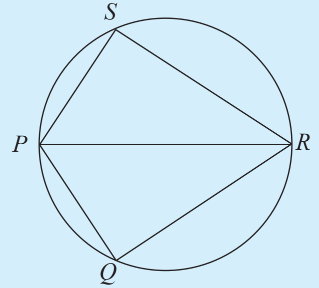
**4.** $AC$ என்பது வட்டம் $ABCD$ இல் ஒரு விட்டமாகும். $BC//AD$ ஆகும். $ABCD$ என்பது ஒரு செவ்வகம் எனக் காட்டுக.



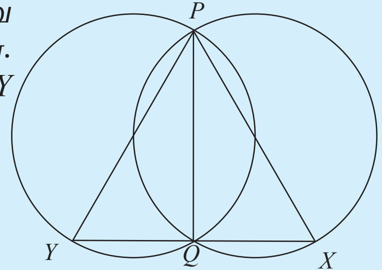

**5.** பெரிய வட்டத்தின் விட்டம் $PSQ$ உம் சிறிய வட்டத்தின் விட்டம் $SQ$ உம் ஆகும். $RQ$ ஆனது சிறிய வட்டத்தை $X$ இல் இடைவெட்டுகின்றது. $P\hat{R}S = R\hat{S}X$ எனக் காட்டுக.




**6.** $PR$ என்பது வட்டம் $PQRS$ இல் ஒரு விட்டமாகும். $S\hat{R}P = P\hat{R}Q$ ஆயின் $S\hat{P}R = Q\hat{P}R$ எனக் காட்டுக.

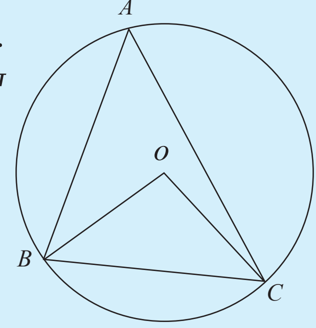



**7.** இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று $P$, $Q$ ஆகிய புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றன. இரண்டு வட்டங்களிலும் விட்டங்கள் $PX$ உம் $PY$ உம் ஆகும். $XQY$ ஒரு நேர்கோடு எனக் காட்டுக.

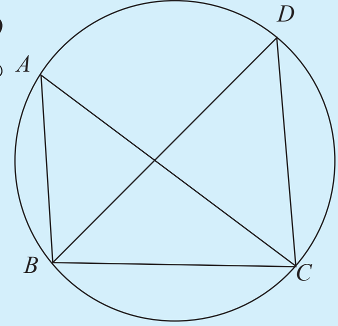


## பலவினப் பயிற்சி

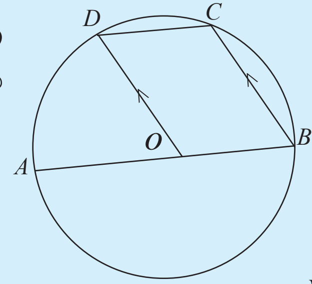
**1.** வட்டம் $ABC$ இல் மையம் $O$ ஆகும். $A\hat{B}O = O\hat{B}C$ உம் $A\hat{B}O = 40^\circ$ உம் ஆகும். $A\hat{C}O$ இன் பெறுமானம் காண்க.



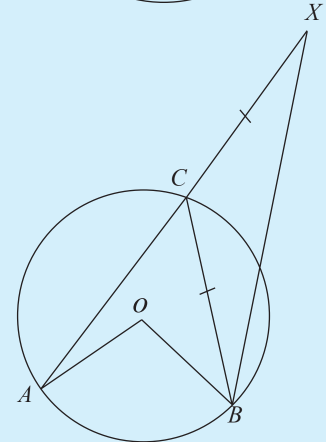

**2.** வட்டம் $ABCD$ இல் விட்டம் $BD$ ஆகும். $BC = CD$ உம் $A\hat{C}B = 35^\circ$ உம் ஆயின் $A\hat{B}C$ இன் பெறுமானம் காண்க.



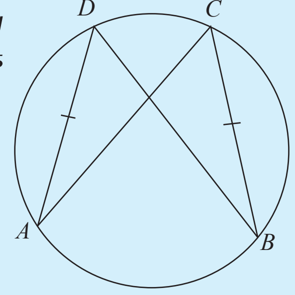

**3.** வட்டம் $ABCD$ இல் விட்டம் $O$ ஆகும். $BC//OD$ உம் $A\hat{B}C = 60^\circ$ உம் ஆகும். $B\hat{C}D$ இன் பெறுமானம் காண்க.



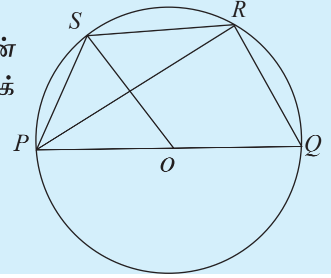

**4.** வட்டம் $ABC$ இல் மையம் $O$ ஆகும். $BC = CX$ ஆகுமாறு $AC$ ஆனது $X$ வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. $A\hat{O}B = 4C\hat{B}X$ எனக் காட்டுக.



**5**. $A$, $B$, $C$, $D$ ஆகிய புள்ளிகள் வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன. $AD = BC$ ஆகும். $DB = CA$ எனக் காட்டுக.




**6.** $PQ$ என்பது $O$ ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகும். $QR//SO$ ஆகும். $SR = SP$ எனக் காட்டுக.



32

# அளவிடைப் படங்கள்

**இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,**

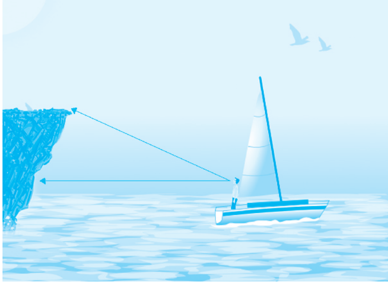
- ஏற்றக் கோணம், இறக்கக் கோணம் என்பன பற்றி அறியவும் அளவிடைப் படத்தை வரைவதற்கும்

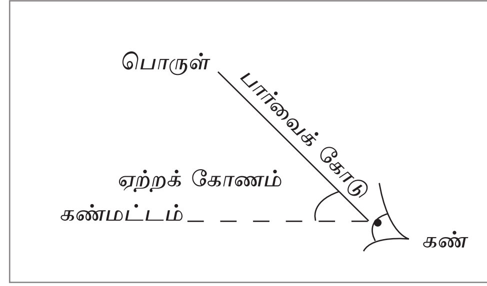
தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

## 32.1 அளவிடைப் படங்கள்

அளவிடைப் படத்தின் மூலம் கிடைத் தளமொன்றிலுள்ள ஓர் இடத்தின் அமைவை அவ்விடத்தின் திசைகோள், தூரம் என்பவற்றில் தருவதற்கு முன்னைய வகுப்புகளில் நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். கிடைத் தளத்தில் அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளியின் அமைவை ஏற்றக் கோணம், இறக்கக் கோணம் என்பவற்றிலிருந்து, அளவிடைப் படம் வரைந்து காணும் முறையை இப்பாடத்தில் கற்போம்.

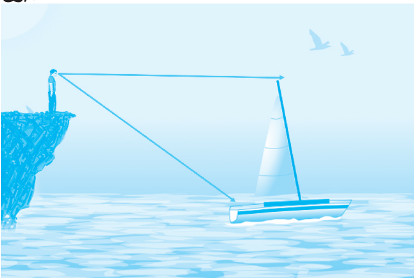
**ஏற்றக் கோணம்**

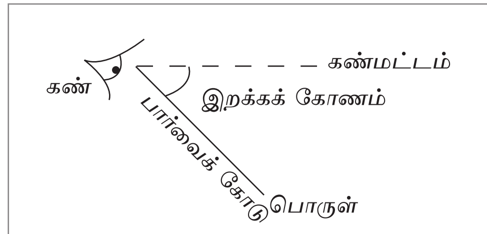





கண் மட்டத்துக்கு மேலேயுள்ள யாதாயினுமொரு பொருளைப் பார்க்கும்போது, அவதானியின் கண்மட்டத்துக்கும் (கிடைக் கோட்டுக்கும்) பொருளைப் பார்க்கும் பார்வைக் கோட்டுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் **ஏற்றக் கோணம்** எனப்படும்.

**இறக்கக் கோணம்**





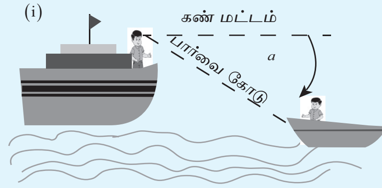

கண்மட்டத்திற்கு கீழே அமைந்துள்ள யாதாயினுமொரு பொருளைப் பார்க்கும்போது, அவதானியின் கண்மட்டத்துக்கும் (கிடைக் கோட்டுக்கும்) பொருளைப் பார்க்கும் பார்வைக் கோட்டுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் இறக்கக் கோணம் எனப்படும்.

**குறிப்பு**: ஏற்றக் கோணமும் இறக்கக் கோணமும் எப்போதும் கண்மட்டத்துடன் (கிடைக் கோட்டுடன்) அமையும் கோணமாகும்.

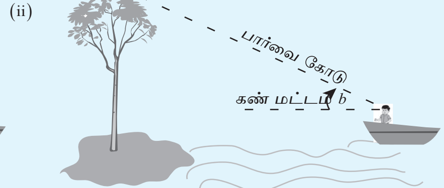
**பயிற்சி 32.1**

**1.** கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் உருவிலும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள கோணம் ஏற்றக் கோணமா அல்லது இறக்கக் கோணமா என எழுதுக.

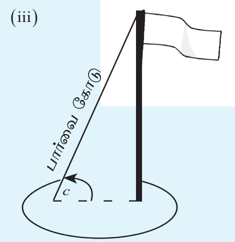
(i)



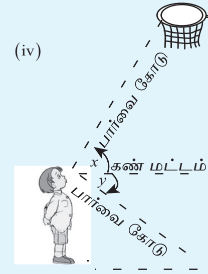

(ii)




(iii)

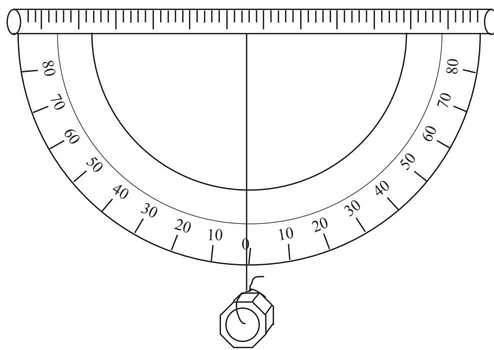


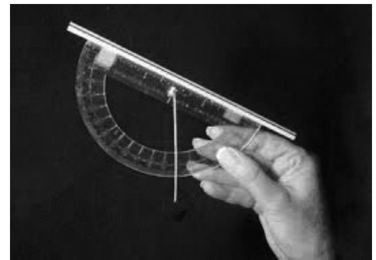

(iv)




## 32.2 சாய்வுமானி (Clinometter)

ஒரு கிடைத்தளத்திலுள்ள பொருளொன்றின் அமைவை எடுத்துரைக்க ஏற்றக் கோணத்தின் அல்லது இறக்கக் கோணத்தின் பருமன் தெரிந்திருக்க வேண்டும், இக்கோணங்களை அளந்து கொள்வதற்காக சாய்வுமானி பயன்படுத்தப்படும்.



ஓர் எளிய சாய்வுமானியை வகுப்பறையில் செய்துகொள்வதற்காக பின்வரும் படிமுறைகளைப் பின்பற்றுவோம்.

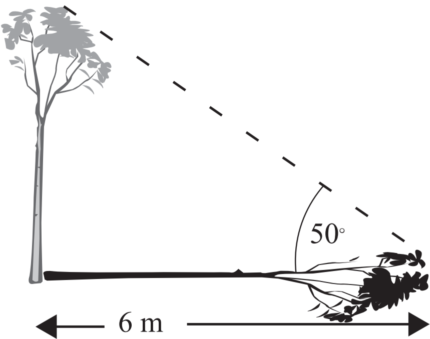
- ஆரை 10 cm அளவிலான ஓர் அரை வட்டத்தை ஒரு காட்போட்டில் வெட்டிக் கொள்க.
- நேர் விளிம்பில் ஒவ்வொரு முனையிலும் $90^{\circ}$ எனவும் வளைந்த விளிம்பின் மத்தியில் $0^{\circ}$ எனவும் வளைந்த விளிம்பில் 10 சிறிய அளவிடையில் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு எண்களை எழுதுக.
- அரை வட்டத்தின் நேர் விளிம்பின் வழியே ஒரு பானம் உறுஞ்சும் குழாயைப் பொருத்துக.
- 10 cm இலும் கூடிய நீளமுடைய ஒரு நூலின் ஒரு முனையில் சிறிய பாரமொன்றை கட்டி மற்றைய முனையை விளிம்பின் நடுப்புள்ளியுடன் அதாவது அரை வட்டத்தின் மையத்துடன் இணைக்குக.

குளாய் கிடையாக இருக்கும்போது நூலானது $0^{\circ}$ இற்கூடாகச் செல்லும். குழாய் கிடையுடன் $45^{\circ}$ சாய்வைக் காட்டும்போது நூலானது $45^{\circ}$ இற்கூடாகச் செல்லும். அதாவது நூலானது நிலைக்குத்துடன் $45^{\circ}$ சாய்வைக் காட்டும். இதற்கேற்ப சாய்வுமானியைப் பயன்படுத்தி ஏற்றக் கோணம், இறக்கக் கோணம் ஆகியவற்றை அளக்கலாம்.

**பயிற்சி 32.2**

**1.** நீங்கள் தயாரித்த சாய்வுமானியின் மூலம் கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியினதும் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.
   (i) பாடசாலைக் கொடிக்கம்பத்தின் உச்சி.
   (ii) ஒரு கட்டடத்தின் உச்சி.
   (iii) பாடசாலைத் தோட்டத்திலுள்ள ஒரு மரத்தின் உச்சி.
   (iv) வலைப்பந்துக் கம்பமொன்றின் உச்சி

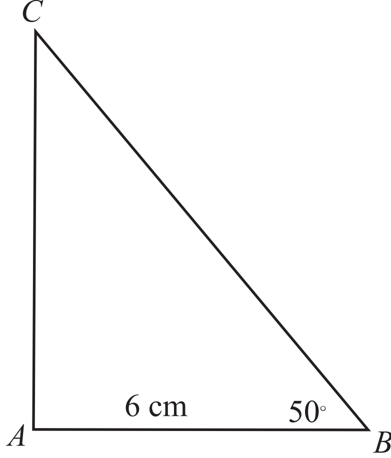
## 32.4 நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ள தகவல்களைக் காட்டும் அளவிடைப் படம்




இப்போது நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அளவிடைப் படத்தைப் பயன்படுத்தும் சில சந்தர்ப்பங்களை பார்ப்போம். ஒரு மரத்தின் நிழல் விழுந்திருந்த விதம் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது. அத்தரவுகளுக்கேற்ப ஓர் அளவிடைப் படத்தை வரைந்து மரத்தின் உயரத்தைக் காண்போம்.

முதலில் பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைத் தெரிந்துகொள்வோம். 1 cm இனால் 1 m ஐக் காட்டுவோம். அதாவது 1 cm இனால் 100 cm காட்டப்படும். அளவிடை 1 : 100 ஆகும்.

அதற்கேற்ப 6 m ஐக் குறிப்பதற்கு 6 cm நீளமான ஒரு கோட்டை வரைதல் வேண்டும். அதனை $AB$ எனக் கிடையாக வரைவோம். $B$ இல் பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி $A\hat{B}C = 50^\circ$ ஆகுமாறு வரைவோம். முக்கோணி $ABC$ ஐப் பூரணப்படுத்துவோம்.




அளவிடைப்படத்தின்படி நீளம் $AC$ இன் மூலம் மரத்தின் உயரத்தைப் பெற்றுக்கொள்ளலாம். அது 7.2 cm என்பதை நீங்கள் காண்பீர்கள்.

$AC$ இன் நீளம் $= 7.2$ cm

1 cm இனால் 100 cm காட்டப்படுவதால்.

$\therefore$ மரத்தின் உண்மையான உயரம் $= 7.2 \times 100$

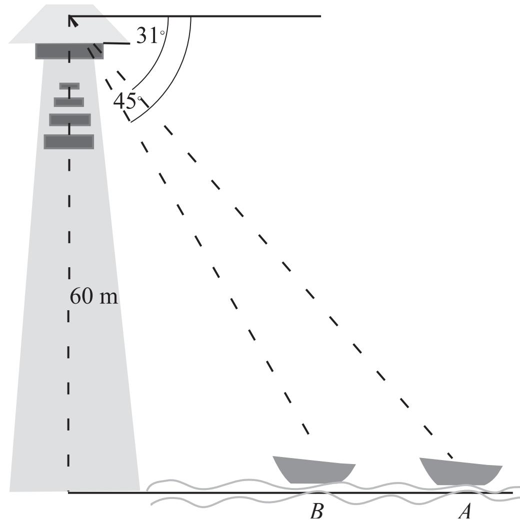
$= 720$ cm

$\therefore$ மரத்தின் உயரம் 720 cm ஆகும்.

அதாவது 7.2 m ஆகும்.

**உதாரணம்** 1

60 m உயரமான ஒரு வெளிச்சவீட்டிலிருந்து பார்க்கும் ஓர் அவதானி கடலில் தொலைவிலுள்ள $A$ என்னும் ஒரு படகை $31^\circ$ இறக்கக் கோணத்திலும் $B$ என்னும் படகை $45^\circ$ இறக்கக் கோணத்திலும் அவதானிக்கின்றான். $A$, $B$ ஆகிய இரண்டு படகுகளும் வெளிச்ச வீடும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அமைந்துள்ளன. மேற்குறித்தத் தகவல்களுக்காக ஓர் அளவிடைப்படத்தை வரைந்து $A$, $B$ ஆகிய படகுகளுக்கிடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.



1 cm இனால் 10 m ஐக் காட்டுவோம்.
1 m = 100 cm என்பதால்.
தெரிந்தெடுத்த அளவிடைக்கேற்ப 1 cm இனால் 1000 cm குறிப்பிடப்படும்.
∴ அளவிடை 1 : 1000 ஆகும்.

---

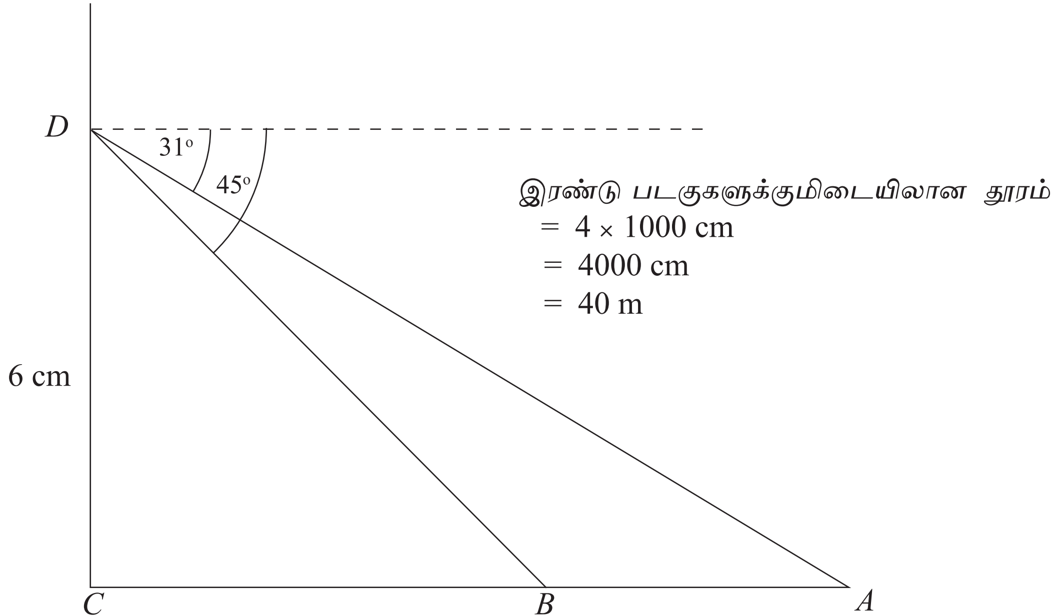
**குறிப்பு:** மிகத் தொலைவிலுள்ள பொருள்களை அளவிடைப் படங்களில் காட்டும் போது மனிதனின் உயரமானது தூரத்துடன் ஒப்பிடும்போது மிகச் சிறியதென்பதால் மனிதனின் உயரத்தைப் புறக்கணிக்கலாம்.

---

அளவிடைக்கேற்ப வெளிச்ச வீட்டின் உயரத்தைக் குறிப்பதற்காக 6 cm நீளமுடைய ஒரு கோட்டை வரைய வேண்டும். அக்கோட்டை $CD$ எனக் கொள்வோம்.

இனி அளவிடைப் படத்தை வரைவோம்.

- முதலில் 6 cm நிலைக்குத்துக் கோடொன்றை வரைந்து அதனை $CD$ எனப் பெயரிடுக.
- $C$ இலும் $D$ இலும் அந்நிலைக்குத்துக் கோட்டுக்கு இரண்டு செங்குத்துகள் வரைக.
- $D$ இல் வரையப்பட்ட கிடைக்கோட்டுடன் $31^\circ$ இறக்கக் கோணத்தை வரைக. இக் கோட்டை $C$ இல் வரைந்த செங்குத்துக் கோடு சந்திக்கும் புள்ளியை $A$ எனப் பெயரிடுக.
- $D$ இல் வரையப்பட்ட கோட்டுடன் $45^\circ$ இறக்கக் கோணத்தை வரைக. இக் கோட்டை $C$ இல் வரைந்த செங்குத்துக் கோடு சந்திக்கும் புள்ளியை $B$ எனப் பெயரிடுக.
- இனி $AB$ இற்கிடையிலுள்ள தூரத்தை அளக்க. அது $AB$ = 4 cm என்பதை நீங்கள் காண்பீர்கள்.

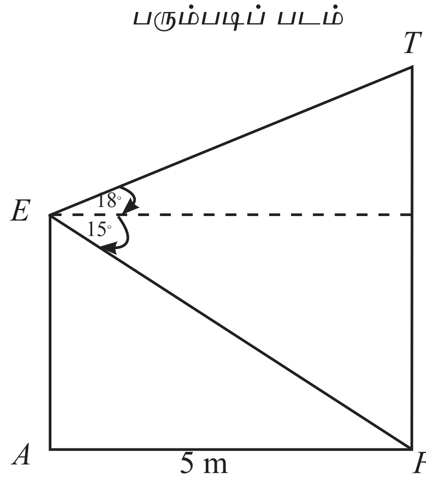


**உதாரணம் 2**

கிடையான ஒரு விளையாட்டு மைதானத்திலுள்ள $A$ என்னும் ஓர் இடத்திலிருந்து 5 m தொலைவிலுள்ள வலைப்பந்து கம்பமொன்றின் உச்சி $T$ ஐப் பார்க்கும் நந்தினி அதனை தனது கண்மட்டமாகிய $E$ யிலிருந்து $18^\circ$ ஏற்றக்கோணத்தில் காண்கிறாள். அதே இடத்திலிருந்து கம்பத்தின் அடியிலுள்ள $F$ என்னும் புள்ளியைப் பார்க்கும்போது அது கண்மட்டத்திலிருந்து $15^\circ$ இறக்கக் கோணத்தில் அமைந்திருந்தது. அளவிடைப் படம் ஒன்றை வரைந்து வலைப்பந்துக் கம்பத்தின் உயரத்தையும் நந்தினியின் உயரத்தையும் காண்க.

உருவப்படமொன்று தரப்படாதவிடத்து தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப ஒரு பரும்படிப் படத்தை வரைந்த பின்னர் அளவிடைப் படத்தை வரைவது மிகப் பொருத்தமானதாகும்

பரும்படிப் படம்




இனி அளவிடைப் படத்தை வரைவதற்குப் பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைத் தெரிந்து கொள்வோம்.

2 cm இனால் 1 m ஐக் காட்டுவோம்.

அதாவது 2 cm இனால் 100 cm காட்டப்படும்.

$\therefore$ 1 cm இனால் 50 cm காட்டப்படும்.

$\therefore$ அளவிடை 1 : 50 ஆகும்.

$\therefore$ 1 m, 2 cm ஆல் காட்டப்படும்.

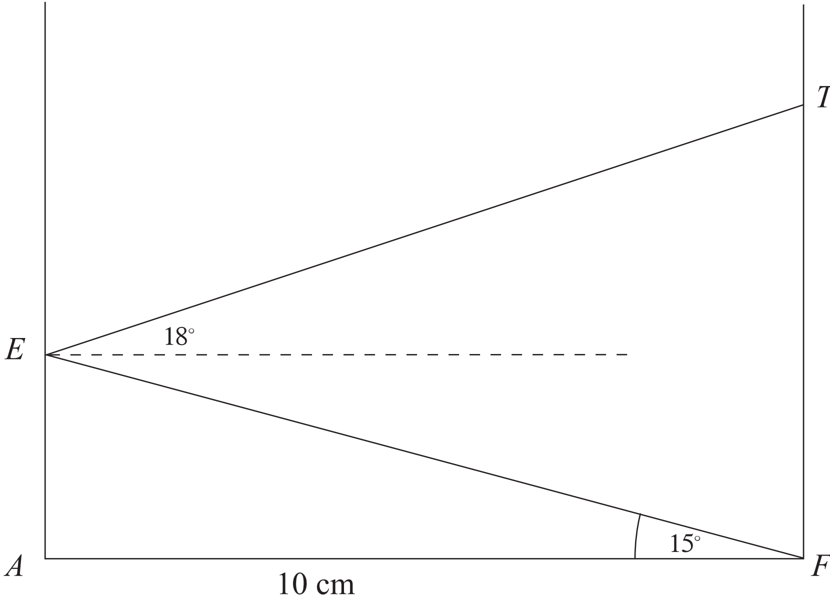
அதாவது, 5 m என்பது 10 cm ஆகும்.

அளவிடைப் படத்தை வரைவதற்கான ஆலோசனைகள்

குறிப்பு: இங்கு மனிதனுக்கும் வலைப்பந்துக் கம்பத்துக்கும் இடையிலுள்ள தூரம் குறைந்த பெறுமானமொன்றை எடுப்பதால் மனிதனின் உயரத்தைக் கவனத்தில் கொண்டு அளவிடைப் படத்தை வரைவதன் மூலம் மிகச் சரியான விடையைப் பெற்றுக்கொள்ளலாம்.

- $A$, $F$ இற்கிடையிலுள்ள தூரம் 5 m என்பதனால் மேற்குறித்த அளவிடைக்கேற்ப 10 cm நீளமான ஒரு கோட்டை வரைந்து அதன் இரு அந்தங்களையும் $A$ , $F$ எனக் குறிக்க.
- $A$ , $F$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்தும் இரண்டு செங்குத்துக்கள் அமைக்க.
- புள்ளி $E$ ஆனது இதுவரை அறியப்படாத ஒரு புள்ளி என்பதால் $E$ இல் இறக்கக் கோணத்தை அமைக்க முடியாது. $E$ இலுள்ள இறக்கக் கோணமும் $E\hat{F}A$ உம் ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் என்பதால் அவை சமனானவை ஆகும். $E\hat{F}A = 15^{\circ}$ ஆகுமாறு $F$ இலிருந்து வரைந்த நேர்கோடானது $A$ இல் வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டை சந்திக்கும் புள்ளியை $E$ எனப் பெயரிடுக.
- இனி, புள்ளி $E$ அறியப்பட்டுள்ளதால் $E$ இல் கோடு $AE$ இற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோட்டை வரைக.
- அக்கோட்டுடன் $18^{\circ}$ ஏற்றக் கோணமொன்றை வரைக. அந்நேர்கோடானது $F$ இல் வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டை சந்திக்கும் புள்ளியை $T$ எனப் பெயரிடுக.
- அளவிடைப் படத்தில் நந்தினியின் உயரம் $EA$ யும் கம்பத்தின் உயரம் $TF$ ஆகும்.

அளவிடைப் படம்




அளவிடைப் படத்துக்கமைய

$AE = 2.6$ cm

$\therefore$ நந்தினியின் உயரம் $= 2.6 \times 50$ cm
$= 130.0$ cm
$= 1.3$ m .

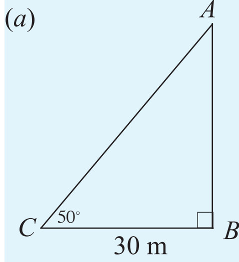
$TF = 6$ cm

$\therefore$ வலைபந்துக் கம்பத்தின் உயரம் $= 6 \times 50$ cm
$= 300$ cm
$= 3$ m .

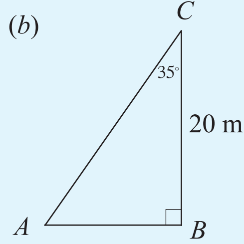
**பயிற்சி 32.3**

**1.** கீழே ஒவ்வோர் உருவிலும் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப அளவிடைப் படங்களை வரைந்து $AB$ இன் நீளத்தைக் காண்க.

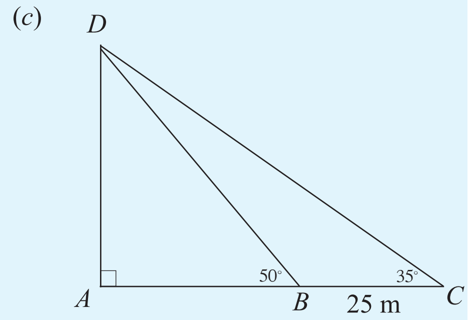
(a)



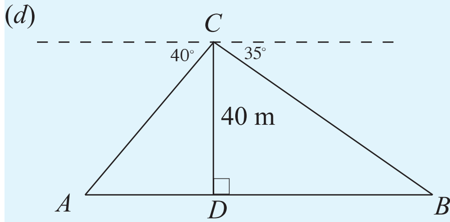

(b)



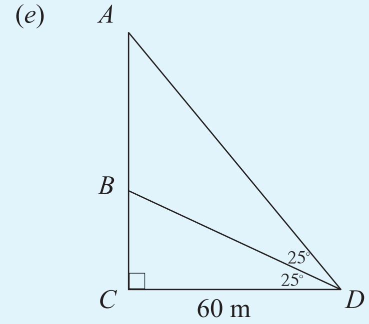

(c)



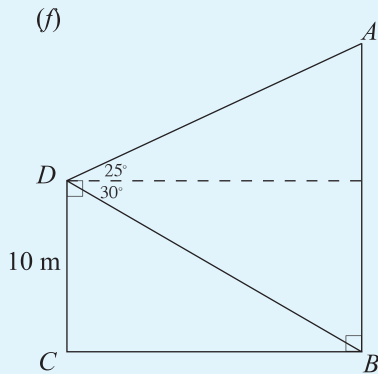

(d)



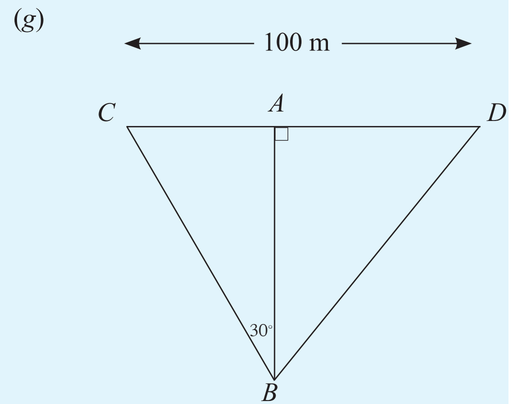

(e)



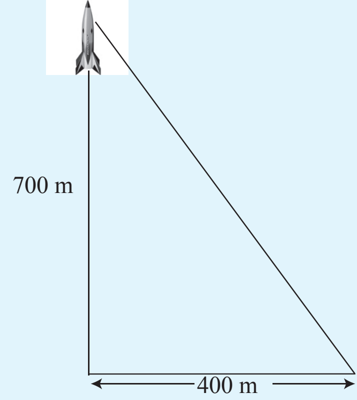

(f)




(g)



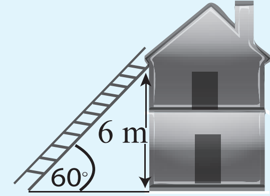
**2.** ஒரு ரொக்கட் 700 m நிலைக்குத்தாக மேலே இருக்கும் ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் ஓர் அவதானி அதன் தொடக்க நிலையத்திலிருந்து கிடையாக 400 m தூரத்தில் ரொக்கட்டைக் காண்கின்றான். அச்சந்தர்ப்பத்தில் ரொக்கட் கிடையுடன் அமைக்கும் ஏற்றக் கோணத்தை ஓர் அளவிடைப் படத்தின் மூலம் காண்க.



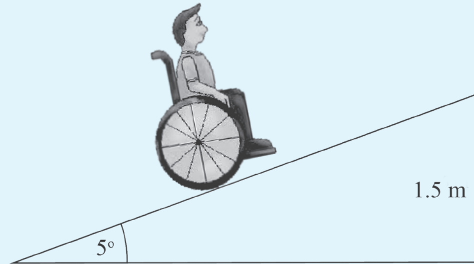

**3.** ஒரு சுவரில் சரிவாக வைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் ஏணி உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது. அதில் குறிக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப பொருத்தமான ஓர் அளவிடைப் படம் வரைந்து,

(i) ஏணியின் நீளத்தைக் காண்க.

(ii) ஏணியின் அடிக்கும் சுவருக்கும் உள்ள தூரத்தைக் காண்க.




**4.** புதிதாக நிர்மாணிக்கப்பட்ட ஒரு கட்டத்தில் சக்கர நாற்காலிகளை ஓட்டிச் செல்வதற்காக அமைக்கப்பட்ட ஒரு மேடை உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது. அதில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப பொருத்தமான ஓர் அளவிடைப் படம் வரைந்து மேடையின் நீளத்தைக் காண்க.

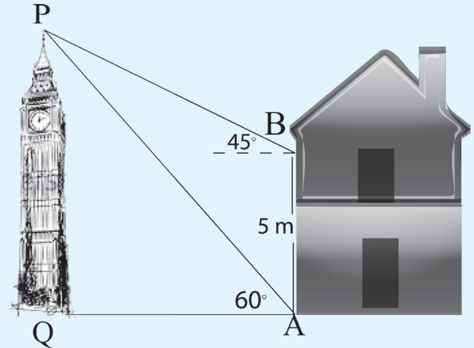



**5.** தனது பாடசாலைத் தோட்டத்தில் அருகே செல்ல முடியாத ஓர் இடத்தில் அமைந்துள்ள ஒரு மாமரத்தின் உயரத்தையும் அம்மரத்திற்கு ரமேஸ் நிற்கும் இடத்திலிருந்து உள்ள தூரத்தையும் அளக்குமாறு கணித பாட ஆசிரியர் பிரதாபன் மாணவன் ரமேஸிடம் கூறினார். அவன் தான் தயாரித்த ஒரு சாய்வுமானியைப் பயன்படுத்தி $A$ என்னும் இடத்திலிருந்து மரத்தின் உச்சியிலுள்ள புள்ளி $P$ இற்குள்ள ஏற்றக் கோணம் $30^\circ$ எனவும், $A$ இலிருந்து 10 m தூரம் மரத்தை நோக்கிச் சென்ற பின்னர் $B$ என்ற இடத்திலிருந்து ஏற்றக் கோணம் $40^\circ$ எனவும் அளவுகளைப் பெற்றுக் கொண்டான். $A$, $B$ ஆகிய புள்ளிகளும் மாமரமும் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அமைந்துள்ளன எனக் கொண்டு ரமேஸ் பெற்றுக் கொண்ட அளவுகளிலிருந்து ஓர் அளவிடைப் படம் வரைந்து மாமரத்தின் உயரத்தையும் $A$ இலிருந்து மாமரத்துக்கு உள்ள தூரத்தையும் காண்க. (ரமேஸின் உயரத்தைப் புறக்கணிக்க. )

6. திரு.சபேசன் தனது வீட்டின் மேல் மாடியிலிருந்து வீட்டுத் தோட்டத்திலுள்ள நிலைக்குத்தான ஒரு தென்னை மரத்தின் உச்சியை $40^\circ$ ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கிறார். தென்னை மரம் வீட்டிலிருந்து 6 m தூரத்தில் அமைந்திருப்பின், அவர் மேல் மாடியிலிருந்து தேங்காய் பறிப்பதற்குத் தேவையான தடியின் அதி குறைந்த நீளத்தை மீற்றரில் காண்க.

7. சுதந்திர தினத்தன்று தேசியக் கொடியை ஏற்றுவதற்கான ஒழுங்குகளை செய்வதற்கு மாணவத் தலைவன் ரிஸ்வானிடம் பொறுப்பளிக்கப்பட்டிருந்தது. ரிஸ்வான் கொடிக் கம்பத்திலிருந்து 10 m தூரத்திலுள்ள கட்டடத்தின் இரண்டாம் மாடியிலுள்ள அவனது வகுப்பறையிலிருந்து சாய்வு மானியைப் பயன்படுத்தி அளவுகளைப் பெற்றான். அப்போது கொடிக் கம்பத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் $20^\circ$ எனவும் கொடிக் கம்பத்தின் அடிக்கான இறக்கக் கோணம் $50^\circ$ எனவும் பெறப்பட்டது. அளவுகளிலிருந்து ஓர் அளவிடைப் படம் வரைந்து கொடிக் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

8. ஒரு நகரத்தில் கிடைத்தரையில் அமைந்துள்ள ஒரு மணிக்கூட்டுக் கோபுரத்தின் உச்சி $P$ ஆனது புள்ளி $A$ இலுள்ள ஓர் அவதானிக்கு $60^\circ$ எற்றக் கோணத்தில் தெரிகிறது. புள்ளி $A$ இற்கு 5 m உயரத்தில் நிலைக்குத்தாக மேலே ஒரு கட்டடத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளி $B$ இலிருந்து $P$ இன் ஏற்றக் கோணம் $45^\circ$ ஆகும். பொருத்தமான ஓர் அளவிடைப் படம் வரைந்து மணிக்கூட்டுக் கோபுரத்தின் அடியிலுள்ள புள்ளி $Q$ இலிருந்து புள்ளி $A$ இற்கு உள்ள தூரத்தையும் மணிக்கூட்டுக் கோபுரத்தின் உயரத்தையும் காண்க.




9. ஆலய மணிக் கோபுரமொன்றிலிருந்து 3 m தொலைவில் நிற்கும் ஓர் அவதானி மணிக் கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தை $60^\circ$ எனவும் மணிக் கோபுரத்தின் அடியின் இறக்கக் கோணம் $25^\circ$ எனவும் காண்கின்றார். பொருத்தமான ஓர் அளவிடைப் படம் வரைந்து மணிக் கோபுரத்தின் உயரத்தையும் அவதானியின் உயரத்தையும் காண்க.

# ලඝුගණක

## மடக்கைகள்

## LOGARITHMS

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 | 4 | 8 | 12 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 26 | 30 | 34 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 15 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

# ලඝුගණක

**மடக்கைகள்**

**LOGARITHMS**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences (මධ්‍යන්‍ය අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள்) 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

## கலைச் சொற்கள்

**அ**

| | | |
|---|---|---|
| அடி | පාදය | Base |
| அரியம் | ප්‍රිස්මය | Prism |
| அரை வட்டம் | අර්ධ වෘත්තය | Semicircle |
| அரைவட்டமொன்றில் அமையும் கோணங்கள் | අර්ධ වෘත්තයේ කෝණ | Angles in a semicircle |
| அளவிடை வரைபு | පරිමාණ රූප | Scale drawings |
| அடுத்துள்ள பக்கங்கள் | බද්ධ පාද | Adjacent sides |
| அட்சரக்கணிதப் பின்னங்கள் | වීජීය භාග | Algbraic Fractions |

**ஆ**

| | | |
|---|---|---|
| ஆயிடை | ප්‍රාන්තරය | Interval |
| ஆரைச்சிறை | කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩය | Sector |
| ஆள்கூறுகள் | ඛණ්ඩාංක | Coordinates |

**இ**

| | | |
|---|---|---|
| இணைகரம் | සමාන්තරාස්‍රය | Parallelogram |
| இடை | මධ්‍යන්‍යය | Mean |
| இடைவித்தியாசம் | මධ්‍යන්‍ය අන්තරය | Mean Difference |
| இடைவெட்டு | ඡේදනය | Intersection |
| இருபடிச் சார்பு | වර්ගජ ශ්‍රිත | Quadratic function |
| இழிவுப் பெறுமானம் | අවම අගය | Minimum value |
| இறக்கக் கோணம் | අවරෝහණ කෝණය | Angle of depression |

**உ**

| | | |
|---|---|---|
| உயர் பெறுமானம் | උපරිම අගය | Maximum value |
| உருளை | සිලින්ඩරය | Cylinder |

**எ**

| | | |
|---|---|---|
| எடு கொண்ட இடையை | උපකල්පිත මධ්‍යන්‍යය | Assumed Mean |
| எண் கோடு | සංඛ්‍යා රේඛාව | Number line |
| எண் தொடர் | සංඛ්‍යා අනුක්‍රම | Number Sequence |
| எழுமாற்று நிகழ்ச்சிகள் | අහඹු සිදුවීම් | Random events |
| எழுமாற்று பரிசோதனைகள் | සසම්භාවී පරීක්ෂණ | Random experiments |
| எழுவாய் | උක්තය | Subject |

| | | |
|---|---|---|
| எளிய நிகழ்ச்சிகள் | සරල සිද්ධි | Simple events |
| ஏற்றக் கோணம் | ආරෝහණ කෝණය | Angle of elevation |




| | | |
|---|---|---|
| ஒரே துண்டக் கோணம் | එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ | Angles in the same |
| ஒழுக்கு | පථය | Locus |




| | | |
|---|---|---|
| கணியம் | රාශිය | Scaler |
| கதி | වේගය | Speed |
| கனவளவு | පරිමාව | Volume |
| கிடைத்தளம் | තිරස් තලය | Horizontal plane |
| கூட்டமாக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் | සමූහිත දත්ත | Grouped Data |
| கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் | සංයුක්ත සිද්ධි | Compound events |
| கோணமானி | ආනති මානය | Clynometer |




| | | |
|---|---|---|
| சமச்சீர் அச்சு | සමමිති අක්ෂය | Axis of Symmetry |
| சமநேர் தகவுடைய நிகழ்ச்சிகள் | සමසේ භව්‍ය | Equally likely events |
| சமனிலிகள் | අසමානතා | Inequalities |
| சமாந்தரக் கோடுகள் | සමාන්තර රේඛා | Parallel lines |
| சார் நிகழ்ச்சிகள் | පරායත්ත සිද්ධි | Dependant events |
| சாரா நிகழ்ச்சிகள் | ස්වායත්ත සිද්ධි | Independent events |
| சுட்டிகள் | දර්ශක | Indices |
| சுட்டி | දර්ශකය | Index |
| சீரான குறுக்கு வெட்டு | ඒකාකාර හරස්කඩ | Uniform Cross Section |




| | | |
|---|---|---|
| தசமம் | දුර | Decimal |
| தசமக் கூட்டு | දශමාංශය | Mantissa |
| தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள் | අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි | Mutually exclusive events |
| தீர்வுகள் | විසඳුම් | Solutions |
| தீர்வு தொடைகள் | විසඳුම් කුලකය | Set of Solutions |
| தொடர்மாறி | සන්තතික දත්ත | Continuous Data |

| | | |
|---|---|---|
| தூரம் | දුර | Distance |
| தூர நேர வரைபு | දුර කාල ප්‍රස්තාර | Distance-Time Graph |
| துண்டம் | වෘත්ත ඛණ්ඩය | Segment |
| தொடை | කුලකය | Set |
| தொடை பிறப்பாக்கி வடிவம் | කුලක ජනන ස්වරූපය | Set Builder Form |
| தொடைக் குறிப்பீடு | කුලක අංකනය | Set Notation |
| தொடைப் பிரிவு | උපකුලකය | Sub Set |
| தேற்றம் | ප්‍රමේයය | Theorem |
| திரும்பற் புள்ளி | හැරුම් ලක්ෂ්‍යය | Turning point |

**ந**

| | | |
|---|---|---|
| நடுப்புள்ளி | මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය | Mid point |
| நடுப் பெறுமானம் | මධ්‍ය අගය | Mid Value |
| நாண் | ජ්‍යාය | Chord |
| நாற்பக்கல் | චතුරස්‍රය | Quadrilateral |
| நிகழ்ச்சிகள் | සිද්ධි | Events |
| நிகழ்தகவு | සම්භාවිතාව | Probability |
| நிலைக்குத்து தளம் | සිරස් තලය | Vertical plane |
| நிறுவல் | සාධනය | Proof |
| நேர்கோடு | සරල රේඛාව | Straight Line |
| நேரம் | කාලය | Time |

**ப**

| | | |
|---|---|---|
| படித்திறன் | අනුක්‍රමණය | Gradiant |
| பரப்பளவு | වර්ගඵලය | Area |
| பார்வைக் கோடு | දෘෂ්ටි රේඛාව | Line of vision |
| பொதுவித்தியாசம் | පොදු අන්තරය | Common difference |
| பின்னகமான தரவு | විවික්ත දත්ත | Discreate Data |
| பிரதியீடு | ආදේශ කිරීම | Substitution |

**ம**

| | | |
|---|---|---|
| மரவரிப் படம் | රුක් සටහන | Tree diagram |
| மடக்கை | ලඝුගණක | Logarithms |
| மடக்கை அட்டவணை | ලඝුගණක වගුව | Table of  Logarithms |
| மறுதலை | විලෝමය | Converse |
| மாதிரிவெளி | නියැදි අවකාශය | Sample space |
| முக்கோணி | ත්‍රිකෝණය | Triangle |
| முரண் மடக்கை | ප්‍රතිලඝුගණකය | Anti Logarithm |
| முடிவுள்ள தொடைகள் | පරිමිත කුලකය | Finite sets |

| | | |
|---|---|---|
| மூட்டற்ற தொடைகள் | වියුක්ත කුලකය | Disjiont sets |
| மூலகங்கள் | අවයව | Elements |
| மூலகங்களின் எண்ணிக்கை | කුලකයක අවයව සංඛ්‍යාව | Number of elements |

**வ**

| | | |
|---|---|---|
| வட்டமொன்றின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணங்கள் | කේන්ද්‍රයේ ආපාතනය කරන කෝණය | Angle subtended at the centre |
| வட்டமொன்றின் கோணங்கள் | වෘත්තයක කෝණ | Angles in a circle |
| வரைபு | ප්‍රස්තාරය | Graph |
| வில் | චාපය | Arc |

# பாடத்திட்டம்

| உள்ளடக்கம் | ஆசிரியர் வழிகாட்டியில் பாட இலக்கம் | பாடவேளைகள் |
|---|---|---|
| **முதலாம் தவணை** | | |
| 1. சுற்றளவு | 1 | 4 |
| 2. வர்க்கமூலம் | 2 | 4 |
| 3. பின்னங்கள் | 3 | 4 |
| 4. ஈருறுப்புக் கோவைகள் | 4 | 4 |
| 5. முக்கோணிகளின் ஒருங்கிசைவு | 5 | 5 |
| 6. பரப்பளவு | 6 | 4 |
| 7. இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகள் | 7 | 4 |
| 8. முக்கோணிகள் I | 8 | } 10 |
| 9. முக்கோணிகள் II | 8 | |
| 10. நேர்மாறு விகிதசமன் | 9 | 5 |
| 11. தரவுகளை வகைகுறித்தல் | 10 | 3 |
| 12. அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொது மடங்குகளுட் சிறியது | 11 | 4 |
| **இரண்டாம் தவணை** | | |
| 13. அட்சரகணிதப் பின்னங்கள் | 12 | 4 |
| 14. சதவீதம் | 13 | 7 |
| 15. சமன்பாடுகள் | 14 | 8 |
| 16. இணைகரங்கள் I | 15 | 7 |
| 17. இணைகரங்கள் II | 16 | 9 |
| 18. தொடைகள் | 17 | 8 |
| 19. மடக்கை I | 18 | 5 |
| 20. மடக்கை II | 19 | 5 |
| 21. வரைபுகள் | 20 | 9 |
| 22. வீதம் | 21 | 5 |
| 23. சூத்திரங்கள் | 22 | 3 |
| **மூன்றாம் தவணை** | | |
| 24. அட்சரகணிதச் சமனிலிகள் | 23 | 7 |
| 25. கூட்டல் விருத்தி | 24 | 6 |
| 26. எண் பரம்பல் | 25 | 10 |
| 27. வட்டத்தின் நாண்கள் | 26 | 6 |
| 28. அமைப்புகள் | 27 | 10 |
| 29. மேற்பரப்பளவும் கனவளவும் | 28 | 9 |
| 30. நிகழ்தகவு | 29 | 8 |
| 31. வட்டத்தின் கோணங்கள் | 30 | 8 |
| 32. அளவிடைப் படம் | 31 | 5 |